

THESES

présentées

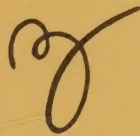
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

F. BADRAKHAN



1^{ère} THESE : Etude des systèmes à hystérésis multilinéaire
à un ou deux degrés de liberté.

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté .*

Soutenues le 29 AVR. 1967 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. RAVILLY	}	Examineurs
M. LAMEAU		
M. TARDY		

THESES

présentées

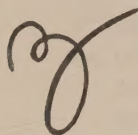
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

F. BADRAKHAN



1^{ère} THESE : Etude des systèmes à hystérésis multilinéaire
à un ou deux degrés de liberté.

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté.*

Soutenues le **29 AVR. 1967** devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU Président

M. RAVILLY

M. LAMEAU

M. TARDY

} Examinateurs

FACULTE DES SCIENCES

	Doyen	M. BRILLOUET	
	Assesseur	M. GARRIGUES	
Professeurs		MM. BRILLOUET	Sciences Mathématiques
		MOLINARO	
		PAUC	
		PETRESCU	
		PIRONNEAU	
		RAFFIN	
		RAVILLY	
		VIVIER	
		AVIGNON	Sciences physiques
		BOULLLOUD	
		COLLET	
		MEZENECV	
		MINN	
		MOUTON	
		DUNOYER	Sciences chimiques
		GOBIN	
		GRAFF	
		QUINIOU	
		WOJTKOWIAK	
		M ^{lle} DEBRAUX	Sciences biologiques
		MM. DUPONT	
		GARRIGUES	
		PIERI	
		SELLIER	
		OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences		MM. JOLIVET A.	Sciences Mathématiques
		LAMEAU	
		IBISCH,	M.C. associé
		BARDON	Sciences physiques
		GOUREAUX	
		GRANGE	
		GUEVEL	
		LASKAR	
		M ^{lle} OFFRET	
		MM. SULMONT	
		JOLIVET J,	Sciences chimiques
		MARTIN	
		POINTEAU	
		ROUXEL	
		TOURNOUX	
		AMOURIQ	Sciences biologiques
		M ^{lle} ASTIE	
		M ^{me} LE DOUARIN	
		MM. LE DOUARIN	
		CAVET	Sciences de la Terre
		FORESTIER	

AVANT - PROPOS

Le présent travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Structures de Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, à qui j'adresse respectueusement mes remerciements sincères.

Bien avant d'entreprendre mes recherches, alors que j'étais encore élève à l'E.N.S.M. , Monsieur le Professeur PIRONNEAU m'a suivi, encouragé et donné la confiance dont un étudiant étranger, loin de son pays natal, a besoin. Et tout au long de cette étude, il m'a assuré les meilleures conditions morales de travail et m'a guidé constamment, tant sur le plan théorique qu'expérimental. C'est grâce à sa surveillance bienveillante et à ses précieux conseils que cette thèse a pu être réalisée. Je remercie ici la circonstance qui me permet de lui en exprimer ma profonde gratitude .

J'adresse encore mes remerciements à Messieurs les Professeurs RAVILLY , LAMEAU et TARDY qui ont bien voulu accepter d'être les membres de notre jury.

Je remercie enfin tous ceux qui ont participé à ce travail, notamment Madame ALUSSON , le service de l'imprimerie de l'E.N.S.M. , qui ont su réaliser avec goût et compétence le présent rapport, et le personnel technique du laboratoire de Mécanique des structures pour l'habileté avec laquelle il m'a aidé dans la réalisation expérimentale et les mesures .

TABLE DES MATIERES

	Pages
<i>Introduction</i>	1
Chapitre Premier	
ETUDE D'UN SYSTEME A HYSTERESIS MULTILINEAIRE ET A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE	3
<i>Introduction</i>	5
A- Etude théorique	7
I - ETUDE STATIQUE	
1 - Expression de la contrainte tangentielle	8
2 - Diagramme dans le plan (F, v)	11
3 - Expression de la force au début du glissement	11
4 - Expression de l'énergie dissipée par glissement	12
5 - Cas où N est impair	13
6 - Cas particulier du glissement total	14
7 - Diagramme approché dans le plan (F, v)	14
8 - Forme réelle du diagramme	15
II - ETUDE DYNAMIQUE	
1 - Mise en équation et résolution	16
2 - Etude particulière pour n très grand	21
3 - Courbes particulières	25
4 - Interprétation physique de $C(A)$ et de $S(A)$	31
III - STABILITE DU REGIME STATIONNAIRE	
1 - Etude générale	35
2 - Etude par les équations de MATHIEU	38
ANNEXES :	
1 - Possibilité d'avoir une solution exacte	43
2 - Influence d'un amortissement visqueux	48
B - Etude expérimentale	49
I - Système à deux lames	51
II - Système à quatre lames	54
III - Système à dix lames	56
Conclusions du premier chapitre	67

Chapitre Deuxième

ETUDE D'UN SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE DECOUPLES

<i>Introduction</i>	70
A - Etude théorique	
I • ETUDE DU SYSTEME LINEAIRE	71
II • ETUDE DU SYSTEME NON LINEAIRE	
1 • Mise en équation	73
2 • Détermination du cycle	73
3 • Méthode de Calcul	74
4 • Etude du régime stationnaire	75
5 • Calcul de $C(A_i)$ et $S(A_i)$	77
6 • Cas où $E_2 = 0$	77
7 • Résonance de phase	78
8 • Etude au voisinage de la résonance pour $E_2 = 0$	78
9 • Courbes « squelettes »	79
III • RECHERCHE DES REPONSES EQUIPHASES	
<i>Mise en équation et résolution</i>	80
B - Etude expérimentale	
1 • Valeur de α	83
2 • Etude au voisinage de la résonance pour $E_2 = 0$	83
3 • Courbes de résonance	83
4 • Comparaison des courbes « squelettes »	83
Conclusions du deuxième chapitre	92

Chapitre Troisième

ETUDE D'UN SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE NON DECOUPLES

<i>Introduction</i>	94
<i>Préliminaire</i>	94
A - Etude statique	
I • INFLUENCE DU PHENOMENE DE GLISSEMENT SUR L'EXPRESSION DU MOMENT FLECHISSANT EN UN POINT	96

	Pages
1 - Expression de la contrainte tangentielle après glissement dans le cas d'une seule charge à l'extrémité libre	96
2 - Expression du moment fléchissant	96
II - EXPRESSION DES FORCES EN FONCTION DES DEFORMATIONS	97
1 - F_1 et F_2 sont dans le même sens	97
2 - F_1 et F_2 ont des sens opposés et	99
3 - Récapitulation des résultats	100
III - DIAGRAMMES THEORIQUES DANS LES PLANS (F_l, V_l)	
1 - F_1 et F_2 sont dans le même sens	101
2 - F_1 et F_2 ont des sens opposés et $ F_1 > F_1 + F_2 $	103
 B - Etude dynamique	
I - DETERMINATION DES CYCLES	106
II - MISE EN EQUATION ET RESOLUTION	107
III - REPONSES EQUIPHASES EN REGIME STATIONNAIRE	108
 C - Etude expérimentale :	
I - ESSAIS STATIQUES	
1 - Vérification de la forme du cycle	112
2 - Energie dissipée	112
II - ETUDE DYNAMIQUE	
1 - Conservation des modes propres à la résonance de phase	113
2 - Forme des courbes « squelettes »	113
3 - Courbes de résonance	114
Conclusions du troisième chapitre	123
Conclusion générale	125
BIBLIOGRAPHIE	127

INTRODUCTION

L'étude des systèmes à hystérésis peut avoir une grande importance en Mécanique des Structures (dans les cas où il s'agit d'un amortissement par glissement ou d'une déformation qui peut atteindre le domaine plastique) .

Les principes de cette étude, valables quelle que soit la forme du cycle, seront appliqués aux systèmes à hystérésis multilinéaire, pour lesquels le diagramme dans le plan (force -déplacement correspondant) est un cycle formé de plusieurs segments de droite, en raison de la relative facilité de réalisation pratique de tels systèmes .

En Mécanique, le phénomène d'hystérésis se présente, le plus souvent, quand il s'agit d'un frottement sec entre différentes parties de la structure . Ce frottement, que l'on suppose suivant la loi de COULOMB, a lieu lorsque les interfaces ou les pièces en contact sont sèches et jointes sous une certaine pression. Dans ce cas, il peut y avoir glissement et dissipation d'une quantité d'énergie très grande par comparaison avec celle due au frottement interne .

L'importance de l'énergie dissipée par glissement a été mise à profit, surtout en construction d'ailettes de turbine en deux segments, pour la première fois, en 1940 par KROON, puis plus récemment (en 1956) par KLUMPP et GOODMAN qui ont montré que l'énergie dissipée par glissement d'un segment sur l'autre peut être très grande, non seulement par rapport à celle due au frottement interne, mais aussi par rapport à l'énergie de déformation de l'ailette. Les vibrations de l'ailette se trouvent ainsi amorties, ce qui diminue considérablement la fatigue à laquelle elle est soumise .

Une importance, au moins égale à celle donnée à la construction d'ailettes, peut être accordée à l'étude des amortisseurs de véhicules, dans le but d'absorber les oscillations nuisibles dues au profil de la route .

L'amortissement par glissement, dû au frottement de COULOMB, et, par suite, le phénomène d'hystérésis, a lieu aussi dans toutes les structures rivetées ou boulonnées, dans le cas des vibrations de grande amplitude des constructions en béton (par glissement relatif de la charpente métallique et de la maçonnerie), dans les vibrations de torsion des arbres d'hélice des navires tournant lentement (lubrifiés par l'eau, aucun film d'eau ne se forme aux faibles vitesses et les paliers sont secs : DEN HARTOG) , et dans tous les cas où il s'agit du mouvement d'un arbre avec des joints mal serrés.

La présence du frottement sec se traduit par l'introduction d'un terme non linéaire dans l'équation du mouvement correspondant à un paramètre, ce qui caractérise la difficulté qui se présente lors de l'étude d'un tel phénomène et explique en même temps la raison pour laquelle ce phénomène est insuffisamment connu , étant donné la réserve qu'inspire un problème de mécanique non linéaire .

Pour cette raison, le présent exposé peut être considéré comme présentant un double intérêt: en effet, d'une part, il permet l'étude du phénomène d'hystérésis multilinéaire en tant que problème particulier de la Mécanique non linéaire et, d'autre part, inversement, il permet d'adapter les méthodes classiques connues en Mécanique des vibrations des structures à l'étude de quelques phénomènes d'hystérésis multilinéaire .

Nous envisagerons dans ce qui suit la recherche de réponses sinusoïdales (l'hypothèse de l'existence et de l'unicité est suffisamment vérifiée par l'expérience) . Une solution

générale pour un nombre quelconque de degrés de liberté n'est pas envisageable, mais si les solutions du problème à un seul degré de liberté, ou celles d'un système à deux degrés de liberté découplés, sont suffisamment connues, nous nous contenterons d'avoir quelques renseignements au voisinage de la résonance, dans le cas d'un système à deux degrés couplés.

Dans l'étude théorique, nous supposerons que le mouvement est suffisamment rapide et que les surfaces en contact sont suffisamment lisses pour pouvoir considérer le coefficient de frottement de COULOMB comme constant.

Dans une première partie, nous étudierons un système à un seul degré de liberté et à hystérésis multilinéaire; en deuxième lieu, un système à deux degrés de liberté découplés sera étudié, préparant ainsi la troisième partie relative à l'étude d'un système à deux degrés non découplés. Dans ce dernier cas, nous nous limiterons à la recherche d'une méthode qui nous permettra de tracer les courbes à la résonance de phase dans le plan (fréquence-amplitude) grâce à une nouvelle méthode déduite de la recherche des réponses équiphasés.

La recherche des réponses sinusoïdales se fera à l'aide de la méthode de l'équilibre harmonique de KRYLOV et BOGOLIOUBOV et qui a été utilisée en 1960 par CAUGHEY, pour l'étude d'un système à hystérésis bilinéaire et à un seul degré de liberté.

÷

÷ ÷

÷

Chapitre Premier

ETUDE D'UN SYSTEME A HYSTERESIS

MULTILINEAIRE ET A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE

L'étude d'un système à hystérésis multilinéaire, à un seul degré de liberté, est particulièrement importante. Elle nous permet d'avoir quelques résultats généraux et les principes et méthodes de calcul utilisés sont applicables à l'étude des systèmes à hystérésis, quelle que soit la forme du cycle et quel que soit le nombre des degrés de liberté .

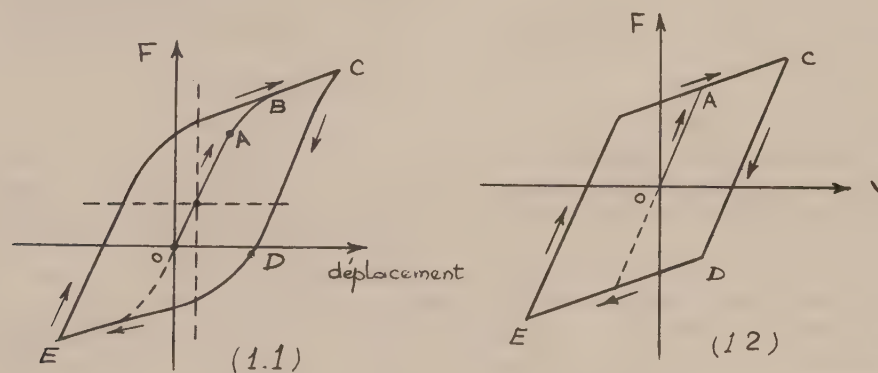
Pour schématiser un tel système, nous considérons l'ensemble de N lames rectangulaires identiques, encastrées à une seule extrémité et soumises, en dehors d'une pression de serrage uniforme, à l'action d'une charge concentrée à l'extrémité libre et d'amplitude variable .

INTRODUCTION

Considérons le système formé de deux lames rectangulaires identiques, encastrées à une extrémité A et libres à l'autre, B. Les deux lames sont maintenues l'une contre l'autre par une pression de serrage uniforme p . Si nous appliquons à l'extrémité libre, une force F croissante, l'ensemble se comporte d'abord comme un seul corps élastique et la flèche à l'extrémité B varie linéairement en fonction de la force. Ceci se traduit par le fait que l'effort tranchant n'est pas encore suffisant pour produire dans l'interface une contrainte tangentielle capable de vaincre les forces de frottement et de provoquer le glissement relatif des deux lames l'une sur l'autre; la variation de la force en fonction du déplacement est représentée dans ce cas par le segment OA (fig.1.1). Si la force augmente en amplitude, les contraintes de glissement dépassent les valeurs permises par les caractéristiques de frottement des deux surfaces et un glissement microscopique se développe dans l'interface. La raideur de l'ensemble varie, ce qui se traduit sur le diagramme par la partie AB. Enfin, lorsque l'amplitude de la force F atteint le point B, le glissement se fait tout le long de l'interface et la variation de la force en fonction du déplacement redevient linéaire avec une pente différente car les deux lames sont maintenant indépendantes et leur raideur n'est que le quart de la raideur initiale.

Si, au point C, la force F décroît, le déplacement diminue et la force de frottement dans l'interface change de signe; donc le glissement s'arrête et le système se comporte à nouveau comme un seul corps élastique jusqu'au point D correspondant à une contrainte tangentielle égale à la force de frottement, ce qui provoque le glissement d'après la loi de Coulomb et ainsi de suite. On aboutit finalement à une boucle d'hystérésis fermée en C.

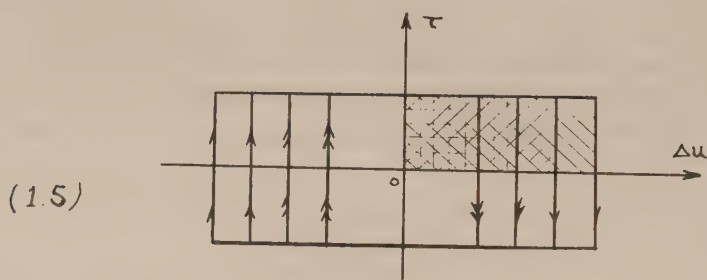
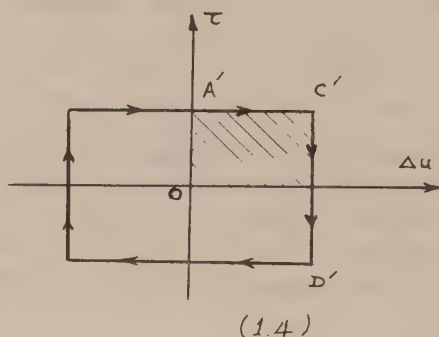
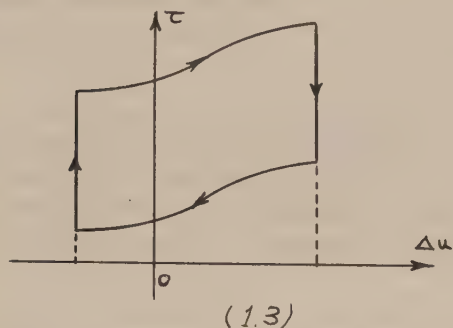
La forme du cycle fermé d'hystérésis a l'allure de la figure (1.1), mais dans l'étude théorique du système, nous supposons que ce cycle est un parallélogramme, ce qui revient à supposer que le glissement total est obtenu instantanément. Nous supposons, en outre, que ce parallélogramme est centré à l'origine O, ce qui est facile à réaliser par un changement de coordonnées correspondant à une position initiale de la poutre au milieu de la zone neutre (fig. 1.2)



Si, à la place de deux lames, nous considérons l'ensemble de N lames identiques, le cycle obtenu sera assimilé à un polygone fermé à points anguleux. (Théoriquement, nous devons toujours avoir des points anguleux, c'est-à-dire un glissement total instantané,

car la contrainte tangentielle est supposée la même tout le long de l'interface . Pratiquement, cette hypothèse est difficile à réaliser, car le serrage ne peut pas être absolument uniforme, l'encastrement, d'une part, et la courbure, d'autre part, ont une influence non négligeable sur la répartition de l'effort tranchant) .

En présence du glissement, l'énergie mécanique est transformée en chaleur; si cette énergie mécanique est celle des vibrations libres ou forcées, un important amortissement est obtenu . L'énergie dissipée dans l'interface est exprimée par la surface du cycle d'hystérésis; nous pouvons considérer aussi la surface limitée par le diagramme représentant la variation de la contrainte tangentielle en fonction du glissement relatif u . Pour deux lames, nous avons le diagramme représenté par la figure (1.3) qui se réduit pour l'étude théorique à un rectangle centré à l'origine (fig. 1.4). Dans le cas de $2n$ lames identiques en glissement total, l'énergie dissipée est le double de la somme des aires de n diagrammes-rectangles (fig. 1.5)



Si la force F est remplacée par une force cyclique (sinusoïdale), à chaque période, on décrit le cycle d'hystérésis, ce qui amortit considérablement la réponse du système .

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier, aussi complètement que possible, le système formé de N lames identiques : une étude statique va nous permettre de tracer le cycle d'hystérésis décrit, de calculer l'énergie dissipée et de connaître l'expression de la contrainte tangentielle en tout point . Cette étude statique servira de base pour l'étude de dynamique qui nous donnera l'expression de la réponse à une excitation sinusoïdale. L'étude de la réponse sera faite à l'aide de la méthode de l'équilibre harmonique de BOGOLIUBOV et KRYLOV . Seul, le régime stationnaire est considéré avec sa stabilité .

A - ETUDE THEORIQUE

Préliminaire

Posons

- μ = coefficient de frottement de Coulomb
- E = module d'Young
- ν = coefficient de Poisson
- p = pression de serrage uniforme
- F = charge concentrée
- L = Longueur d'une lame
- h = Epaisseur d'une lame (suivant y)
- b = Largeur d'une lame (suivant z)
- u, v = déplacements suivant x et y respectivement
- σ, τ = composantes de la contrainte

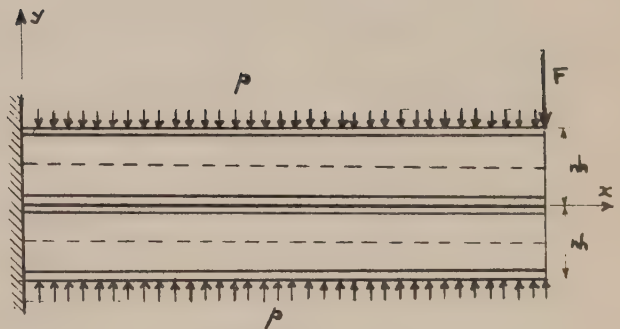


fig. 1.6

Le calcul complet sera fait dans le cas où $N = 2n$. L'étude du cas d'un nombre impair de lames pourra se faire d'une façon identique et nous en donnerons le principe ultérieurement.

En tout point de la structure, on peut écrire $\sigma_y = -p$; le glissement entre deux lames commence lorsque la contrainte tangentielle dans l'interface atteint la valeur $\mu \sigma_y$ (d'après la loi de Coulomb).

En l'absence du glissement, la répartition des contraintes tangentielles est parabolique avec un maximum égal à $\frac{2}{3} \cdot \frac{F}{S}$ sur l'axe neutre (axe des x). A une pression de serrage p donnée, si la valeur de F croît, le glissement commence à l'axe neutre pour :

$$F = \frac{4}{3} n \mu p b h = \frac{4}{3} \mu p b H \quad (\text{si l'on pose } nh = H)$$

A partir de cette valeur de F , la répartition des contraintes tangentielles $\tau_{xy}(y)$ sera représentée par deux paraboles jusqu'au glissement dans les interfaces d'ordonnées $\pm h$; dans ce cas, on aura quatre paraboles et ainsi de suite. (fig. 1.7).

Dans ce qui suit, nous allons faire l'étude pour le cas, où à un instant donné, il y a un glissement dans l'interface m (on appelle interface i , l'interface d'ordonnée ih).

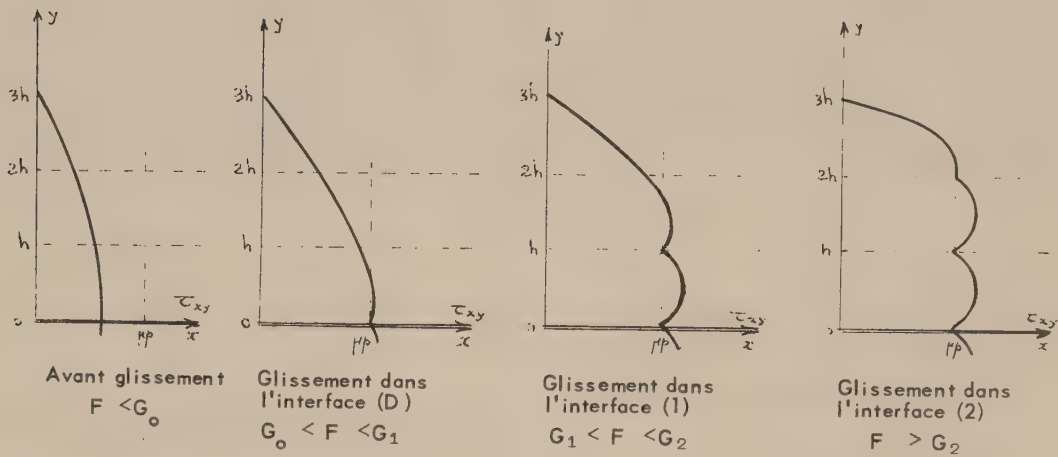


fig. 1.7 ($N=6$)

I - ETUDE STATIQUE

1 - Expression de la contrainte tangentielle :

Nous ferons le calcul pour $N=2n$. Nous supposons que le glissement a lieu jusqu'à l'interface (m)

Posons τ_m = contrainte tangentielle pour $mh \leq y \leq nh$

τ_i = contrainte tangentielle pour $ih \leq y \leq (i+1)h$

$$0 \leq i \leq m$$

a) Conditions aux limites :

Nous supposons que l'état de contrainte est plan, d'où :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

Avec les conditions limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_m(x, nh) = 0 \\ \tau_m^2(x, mh) = \mu^2 \sigma_y^2 = \mu^2 p^2 = \tau_i^{12}(x, ih) = \tau_i^{12}(x, (i+1)h) \\ \int_0^{nh} \tau_{xy}(L, y) dy = \frac{F}{2b} \rightarrow \int_{mh}^{nh} \tau_m(L, y) dy = \frac{F_m}{2b} \text{ et } \int_{ih}^{(i+1)h} \tau_i^1(L, y) dy = \frac{F_i}{2b} \\ \int_0^{nh} \sigma_x(L, y) dy = \int_0^{nh} y \sigma_x(L, y) dy = 0 \\ \text{Même rayon de courbure pour toutes les lames} \end{array} \right.$$

Avec
$$F_m + \sum_{i=0}^{m-1} F_i^1 = F \quad (1.2)$$

La 3^{ème} condition nous permet d'écrire :

$$\tau_m = \mu p + A_m (y - mh) + B_m (y - mh)^2 \quad (1.3)$$

$$\tau_i^1 = \mu p + A_i^1 [y - (i-1)h] (y - ih) \quad (1.4)$$

b) Expression du rayon de courbure :

Nous pouvons toujours écrire : $\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ R étant le rayon de courbure.

D'après l'équation (1.1) l'expression de la contrainte normale σ_x peut s'écrire, pour les lames sans glissement (d'ordonnée $> mh$), sous la forme :

$$\sigma_x = (L - x) [A_m + 2 B_m (y - mh)]$$

Si nous faisons le changement de variable $y = y - \frac{n+m}{2} h$, l'expression du moment de flexion M est la suivante :

$$M = \int_{-(n+m)h/2}^{(n+m)h/2} \sigma_x(y) y dS \quad \text{avec } dS = b dy$$

Finalement nous trouvons, en tenant compte de la 4^{ème} condition limite :

$$\frac{1}{R} = \frac{2 B_m}{E} (L - x) \quad \text{Pour les lames sans glissement}$$

et
$$\frac{1}{R} = \frac{2 A_i^1}{E} (L - x) \quad \text{Pour les lames en glissement d'après un calcul identique au précédent.}$$

Nous en déduisons donc le résultat fondamental suivant :

$$A_i^I = A_i^I = B_m \quad (1.5)$$

La répartition des contraintes tangentielles sur une lame en glissement est la même, quelle que soit la position de cette lame .

c) *Contrainte tangentielle* :

Les trois premières conditions limites nous permettent de calculer A_m et B_m (donc A_i^I) en fonction de F_m .

$$\text{Ainsi nous obtenons : } A_m = - \frac{4 \mu p}{(n-m) h} + \frac{3 F_m}{(n-m)^2 b h^2} \quad (1.6)$$

et

$$B_m = A_i^I = \frac{3 \mu p}{(n-m)^2 h^2} - \frac{3 F_m}{(n-m)^3 b h^3} \quad (1.7)$$

La troisième condition limite appliquée à une lame en glissement (lame i) nous donne :

$$F_{i-1}^I = 2 \mu p b h - \frac{A_i^I b h^3}{3}$$

La relation (1.2) nous donne :

$$F_m = F - 2 m \mu p b h + \frac{b h^3}{3} \sum_{i=1}^m A_i^I$$

$$\text{soit } F_m = F - 2 m \mu p b h + \frac{m b h^3}{3} \cdot B_m$$

En remplaçant B_m par sa valeur donnée par la relation (1.7), nous pourrions avoir l'expression de F_m en fonction de F :

$$F_m = \frac{(n-m)^3}{m+(n-m)^3} \cdot F - \frac{2m(n-m)^3 - m(n-m)}{m+(n-m)^3} \mu p b h \quad (1.8)$$

D'où finalement :

$$\tau_m^I = \mu p + A_m (y-mh) + B_m (y-mh)^2$$

Avec

$$A_m = \frac{3(n-m)}{[m+(n-m)^3] b h^2} F - \frac{m+2(m+2n)(n-m)^2}{[m+(n-m)^3](n-m)} \cdot \frac{\mu p}{h}$$

$$B_m = - \frac{3}{[m+(n-m)^3] b h^3} \cdot F + \frac{3[n+m]}{m+(n-m)^3} \cdot \frac{\mu p}{h^2}$$

$$\tau_i^I = \mu p + A_i^I [y-(i-1)h] (y-i h) \quad \text{avec } A_i^I = B_m$$

2 - Diagramme dans le plan F, v

Appelons G_i la valeur de la force F pour laquelle on a un début de glissement à l'interface i .

Pour $G_i \leq F \leq G_{i+1}$ nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 B_i}{E} (L - x)$$

D'où :

$$y = \frac{2}{E} \left(\frac{L x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \left[\frac{3 \mu p}{(n-i)^2 h^2} - \frac{3 F_i}{(n-i)^3 b h^3} \right]$$

Appelons :

$$y(L) = v$$

$$F_i = (n-i)^3 \frac{E b h^3}{2 L^3} \cdot v + (n-i) \mu p b h$$

Remplaçons F_i par une expression donnée par (1.8)

$$F = \left[(n-i)^3 + i \right] \frac{E b h^3}{2 L^3} \cdot v + (n+i) \mu p b h$$

On a donc une variation linéaire, ce qui est tout à fait normal.

Si nous posons :

$$h = \frac{H}{n}$$

$$F = \frac{(n-i)^3 + i}{2 n^3} \cdot \frac{E b H^3}{L^3} \cdot v + \frac{n+i}{n} \mu p b H \quad (1.9)$$

$$\text{Pour } G_i \leq F \leq G_{i+1}$$

3 - Expression de la force au début du glissement :

$$\text{Pour } G_{m-1} \leq F \leq G_m \text{ on a } F = a_{m-1} v + \lambda_{m-1}$$

$$G_m \leq F \leq G_{m+1} \quad F = a_m v + \lambda_m$$

L'intersection de ces deux segments nous donne la valeur de G_m et de d_m = flèche pour laquelle on a glissement à l'interface m :

$$d_m = \frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{a_m - a_{m-1}} \quad G_m = \frac{a_m \lambda_{m-1} - a_{m-1} \lambda_m}{a_m - a_{m-1}}$$

si nous éliminons le cas $m = 0$ pour lequel

$$G_0 = \frac{4}{3} \mu p b H$$

on pourrait trouver les expressions explicites de d_m et G_m . En effet :

Pour $G_{m-1} \leq F \leq G_m$ on a $F = \frac{(n-m+1)^3 + (m-1)}{n^3} \cdot \frac{a}{4} v + \frac{n+m-1}{n} \mu p b H$

$G_m \leq F \leq G_{m+1}$ $F = \frac{(n-m)^3 + m}{n^3} \cdot \frac{a}{4} v + \frac{n+m}{n} \mu p b H$

avec $a = \frac{2 E b H^3}{L^3} = \text{pente de } F(v) \text{ avant glissement}$

D'où : Pour $m > 0$

$$d_m = \frac{4 \mu p b H}{3 a} \cdot \frac{n^2}{(n-m)(n-m+1)} = \frac{n^2}{(n-m)(n-m+1)} d_0 \quad (1.10)$$

$$G_m = \left[\frac{m + (n-m)^3}{3n(n-m)(n-m+1)} + \frac{n+m}{n} \right] \mu p b H \quad (1.11)$$

4 - Expression de l'énergie dissipée par glissement :

u étant le déplacement d'une lame suivant l'axe x, nous pouvons écrire, d'après la loi de Hooke :

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_y$$

Pour deux lames glissant, l'une par rapport à l'autre, nous pouvons écrire :

$$\Delta u = u_2 - u_1 = E^{-1} \int_0^x \Delta \sigma_x(\xi) d\xi$$

L'énergie dissipée entre ces deux lames est de :

$$D = 4 \mu b E^{-1} \int_0^L [\sigma_y(x,0) \int_0^x \Delta \sigma_x(\xi) d\xi] dx$$

Supposons que l'on ait glissement jusqu'à l'interface m ; entre deux lames de glissement, nous pouvons écrire :

$$|\Delta \sigma_x| = 2(L-x)h A_i^* = |\sigma_2 - \sigma_1|$$

$$D_i^* = \frac{8}{3} \mu p b L^3 E^{-1} h A_i^* = \frac{8}{3nE} \mu p b H L^3 A_i^*$$

A l'interface m, nous avons :

$$\Delta \sigma_x = (L-x)(A_m - B_m h)$$

$$D_m^* = \frac{4}{3} \mu p b L^3 E^{-1} (A_m - B_m h)$$

L'expression de l'énergie totale dissipée par glissement peut s'écrire :

$$D_m = 2 \cdot \frac{8}{3} \mu p b h L^3 E^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} |A_i| + \frac{8}{3} \mu p b h L^3 E^{-1} |A_0| \\ + 2 \cdot \frac{4}{3} \mu p b L^3 E^{-1} |A_m - B_m h|$$

et comme :

$$A_i = B_m$$

$$D_m = \frac{8}{3E} \mu p b L^3 \{ |A_m - B_m h| + (2m-1) |B_m| h \}$$

Avec :

$$A_m = \frac{3(n-m) F}{[m + (n-m)^3] b h^2} - \frac{m+2(m+2n)(n-m)^2}{[m + (n-m)^3] (n-m)} \cdot \frac{\mu p}{h}$$

$$B_m = - \frac{3 F}{[m + (n-m)^3] b h^3} + \frac{3(n+m)}{m + (n-m)^3} \cdot \frac{\mu p}{h}$$

Nous pouvons avoir facilement , à partir de l'expression précédente, la valeur de la pression de serrage optimale qui donne l'énergie maximale . Il suffit d'écrire :

$$\left(\frac{\partial D}{\partial p} \right)_{p_0} = 0$$

5 - Cas où N est impair :

Prenons $N = 2n+1$ lames identiques

Nous pouvons faire le calcul d'après le même principe; si nous appelons interface i l'interface d'ordonnée $(i + \frac{1}{2}) h$, l'axe des x étant pris suivant l'axe de symétrie du système, nous aurons:

$$\tau [x, (n + \frac{1}{2}) h] = 0 \quad \tau [x, (m + \frac{1}{2}) h] = \mu p$$

$$\tau_m = \mu p + A_m [y - (m + \frac{1}{2}) h] + B_m [y - (m + \frac{1}{2}) h]^2$$

Nous trouvons les mêmes expressions que précédemment en fonction de F_m . Nous trouvons d'autre part :

$$F_m = \frac{(n-m)^3}{(n-m)^3 + m + \frac{1}{2}} \cdot F - \frac{(2m+1)(n-m)^3 - (m + \frac{1}{2})(n-m)}{m + \frac{1}{2} + (n-m)^3} \mu p b h$$

Diagramme dans le plan F, v :

$$F = [m + \frac{1}{2} + (n-m)^3] \frac{E b h^3}{2 L^3} \cdot v + (m+n+1) \mu p b h$$

Début du glissement à l'interface m ($y = (m + \frac{1}{2}) h$) :

$$d_m = \frac{4 \mu p b h}{3 a} \cdot \frac{n^2}{(n-m)(n-m+1)}$$

$$G_m = \left[\frac{m + \frac{1}{2} + (n-m)^3}{3n(n-m)(n-m+1)} + \frac{m+n+1}{n} \right] \mu p b H$$

Pour $m > 0$

Avec :

$$G_0 = \frac{4 \mu p b H_1}{3} \left(1 + \frac{1}{4N^2 - 1} \right) \quad (1.12)$$

Force au début du glissement aux interfaces $y = \pm \frac{h}{2}$

H_1 étant égale à Nh et $N = 2n+1$ (nombre total des lames)

6 - Cas particulier du glissement total :

Il suffit de faire $m = n-1$ dans les expressions précédentes ;

$$G_{n-1} = G_f = \frac{13n-6}{6n} \mu p b H \quad (1.13)$$

$$D_{n-1} = \frac{8}{3E} \mu p b L^3 \left\{ \left| \frac{6F}{n b h^2} - \frac{\mu p}{h} \right| + (2n-3)h \left| -\frac{3F}{n b h^2} + \frac{3(2n-1)}{n} \cdot \frac{\mu p}{h} \right| \right\} \quad (1.14)$$

7 - Diagramme approché dans le plan (F, v) :

Le diagramme dans le plan (F, v) se compose de $(m+2)$ segments de droite s'il y a glissement jusqu'à l'interface m .

Les pentes de ces segments vont en diminuant et la pente varie en $\frac{1}{n^2}$ dans le cas du glissement total.

Le moment d'inertie a pour expression :

$$I_m = \frac{m + (n-m)^3}{6} b h^3$$

ou
$$I_m = \frac{m + (n-m)^3}{6n^3} b H^3 \quad (1.15)$$

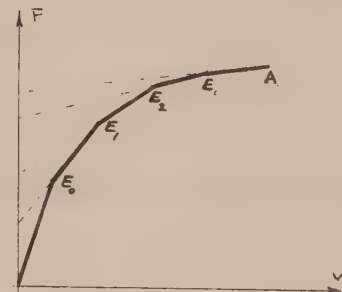


fig. 18

Si le nombre des lames est suffisamment grand, on peut remplacer le diagramme par une courbe continue enveloppée des segments de droite.

L'équation du segment $E_i E_{i+1}$ s'écrit, d'après (1.9)

$$E_i E_{i+1} : F = \frac{(n-i)^3 + i}{4n^3} a v + \frac{n+i}{n} \mu b H p$$

Pour chercher son enveloppe, nous dérivons par rapport à i :

$$0 = \frac{a v}{4n^3} [1 - 3(n-i)^2] + \frac{\mu p b H}{n}$$

$$i = n - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4n^2}{3av} \mu p b H}$$

D'où l'équation de l'enveloppe :

$$F = \frac{a v}{4n^2} - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4n^2}{3av} \mu p b H} \left(\frac{av}{6n^3} + \frac{2\mu p b H}{3n} \right) + 2\mu p b H \quad (1.16)$$

si $n \rightarrow \infty$

$$F \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\mu p b H - \frac{2}{3} \mu p b H \cdot \sqrt{\frac{4\mu p b H}{3av}}$$

Soit :

$$F = 2\mu p b H \left(1 - \frac{1}{3} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4\mu p b H}{3a}} \right) \quad (1.17)$$

qui peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{v} = \frac{4a}{G_o^3} \left(F - \frac{3G_o}{2} \right)^2 \quad (1.18)$$

avec

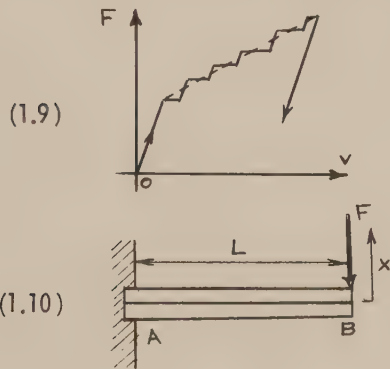
$$G_o = \frac{4}{3} \mu p b H$$

8. Forme réelle du diagramme :

Considérons d'abord le cas de deux lames seulement. Nous avons vu que, lorsque la charge F atteint la valeur G_o , le glissement d'une lame sur l'autre commence et la variation $F(v)$ est continue, linéaire, de pente $\frac{a}{4}$. En réalité le phénomène est plus compliqué. En effet, avant glissement, toute la charge agit sur les deux lames qui forment un ensemble rigide ; lorsque le glissement commence, nous avons affaire à une lame « motrice » qui exerce une partie X seulement de la charge sur une lame « résistante », le glissement cesse et l'ensemble forme à nouveau un tout rigide ; une légère augmentation de F conduit à un nouveau glissement et ainsi de suite ... Pratiquement, pour $F > G_o$, au lieu d'une va-

riation linéaire continue, nous obtenons une sorte de courbe « escalier » qui l'encadre de part et d'autre (fig. 1.9).

La fraction X exercée peut être facilement calculable en écrivant toujours que les deux lames ont la même flèche en B (fig. 1.10)



$$\frac{X L^3}{3EI} = \frac{(F-X) L^3}{3EI}$$

$$\text{d'où : } X = \frac{F}{2}$$

Un raisonnement analogue pour un système à n lames en glissement nous conduit à une réaction $\frac{F}{n}$.

II - ETUDE DYNAMIQUE

Nous remplaçons maintenant la force F par une excitation sinusoïdale et nous supposons que l'amplitude de cette excitation est assez grande pour pouvoir obtenir le glissement jusqu'à l'interface m .

1 - Mise en équation et résolution :

Pour une force F variant entre zéro et F_M , nous avons obtenu le diagramme $OE_0 E_1 \dots E_i \dots E_m A$. Si, au point A , la force décroît, le coefficient de frottement μ change de signe et tout glissement disparaît jusqu'au point A_0 tel que $AA_0 = 2OE_0$. Donc, si l'on utilise une force F périodique, on a dans le plan F, v un cycle fermé $AA_0 \dots A_i \dots BB_0 \dots A$.

Si l'on considère à l'extrémité libre une masse concentrée m pour pouvoir assimiler le système à un seul degré de liberté, on peut écrire l'équation du mouvement de la masse m , de la façon suivante :

$$m \ddot{y} + f_1(y, \dot{y}) = E_1 \cos \omega t \quad (1.19)$$

ou encore :

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = E \cos \omega t$$

la force $f(y, \dot{y})$ étant représentée par le cycle.

Nous avons donc une équation de mouvement non linéaire que l'on peut résoudre par la méthode de l'équilibre harmonique.

Nous cherchons une solution de la forme :

$$y = A \cos \theta \quad (1.20)$$

$$\theta = \omega t + \varphi \quad (1.21)$$

avec

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \dot{A} \cos \theta - A \dot{\varphi} \sin \theta - \omega A \sin \theta$$

Pour avoir une solution périodique, nous écrivons :

$$\dot{A} \cos \theta - A \dot{\varphi} \sin \theta = 0 \quad (1.22)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega \dot{A} \sin \theta - \omega^2 A \cos \theta - \omega A \dot{\varphi} \cos \theta$$

Substituons dans l'équation (1.19)

$$-\omega \dot{A} \sin \theta - \omega^2 A \cos \theta - \omega A \dot{\varphi} \cos \theta + f(A \cos \theta, \mu, t) = E \cos(\theta - \varphi) \quad (1.23)$$

Multiplions (1.22) par $\omega \cos \theta$, (1.23) par $\sin \theta$ et soustrayons :

$$-\omega \dot{A} - \omega^2 A \sin \theta \cos \theta + f(A \cos \theta, \mu, t) \sin \theta = E \cos(\theta - \varphi) \cdot \sin \theta \quad (1.24)$$

Si nous supposons que A et φ varient lentement en fonction du temps, on peut prendre la valeur moyenne sur une période de θ :

$$-\omega \dot{A} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \theta) \sin \theta d\theta = \frac{E}{2} \sin \varphi \quad (1.25)$$

Multiplions (1.22) par $\omega \sin \theta$, (1.23) par $\cos \theta$ et additionnons :

$$-\omega A \dot{\varphi} - \omega^2 A \cos^2 \theta + f(A \cos \theta, \mu, t) \cos \theta = E \cos(\theta - \varphi) \cdot \cos \theta \quad (1.26)$$

valeur moyenne :

$$-\omega A \dot{\varphi} - \frac{\omega^2 A}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \theta) \cos \theta d\theta = \frac{E}{2} \cos \varphi \quad (1.27)$$

Posons

$$C(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \theta) \cos \theta d\theta \quad (1.28)$$

$$S(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \theta) \sin \theta d\theta \quad (1.29)$$

Les équations (1.25) et (1.26) s'écrivent :

$$-2\omega \dot{A} + S(A) = E \sin \varphi \quad (1.30)$$

$$-\omega^2 A - 2\omega A \dot{\varphi} + C(A) = E \cos \varphi \quad (1.31)$$

Tout revient donc à l'étude de ces deux équations .

Si l'on se limite à l'étude du régime stationnaire, dans ce cas, nous pourrons écrire :

$$\dot{A} = 0 \quad \dot{\varphi} = 0$$

Les équations (1.30) et (1.31) deviennent :

$$S(A_0) = E \sin \varphi_0 \quad (1.32)$$

$$-\omega^2 A_0 + C(A_0) = E \cos \varphi_0 \quad (1.33)$$

L'indice 0 caractérisant le régime stationnaire, dans ce qui suit, nous nous limiterons à l'étude de ce régime .

Nous pouvons tirer directement :

$$[C(A_0) - \omega^2 A_0]^2 + [S(A_0)]^2 = E^2 \quad (1.34)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{S(A_0)}{C(A_0) - \omega^2 A_0} \quad (1.35)$$

$$\omega^2 = \frac{C(A_0)}{A_0} \pm \left[\left(\frac{E}{A_0} \right)^2 - \left(\frac{S(A_0)}{A_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.36)$$

Nous avons résonance pour $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Soit pour} \quad \omega^2 = \frac{C(A_0)}{A_0} \quad (1.37)$$

Tout revient donc au calcul de $C(A_0)$ et $S(A_0)$

a) Détermination du cycle :

(voir fig. 1.11)

Remarquons tout d'abord que $B_0 B_1 \dots B_i \dots$ est homothétique de $O E_0 E_1 \dots E_i$ dans l'homothétie $(A, 2)$, $AA_0 A_1 \dots A_i \dots$ est homothétique de $O E_0 E_1 \dots E_i \dots$ dans l'homothétie $(G, -2)$.

Equations des différents segments :

$$E_i E_{i+1} : F = \frac{(n-i)^3 + i}{4n^3} a \cdot v + \frac{n+i}{n} \mu p b H \quad (\text{d'après (1.9)})$$

$$E_m A \equiv B_m A : F = \frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} a v + \frac{n+m}{n} \mu p b H$$

L'équation de AA_0 peut s'écrire : $F = a v + k$

avec en A : $a A + k = -\frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} a A + \frac{n+m}{n} \mu p b H$

D'où : $AA_0 : F = a v + \frac{n+m}{n} \mu p b H + \left[\frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} - 1 \right] a A$

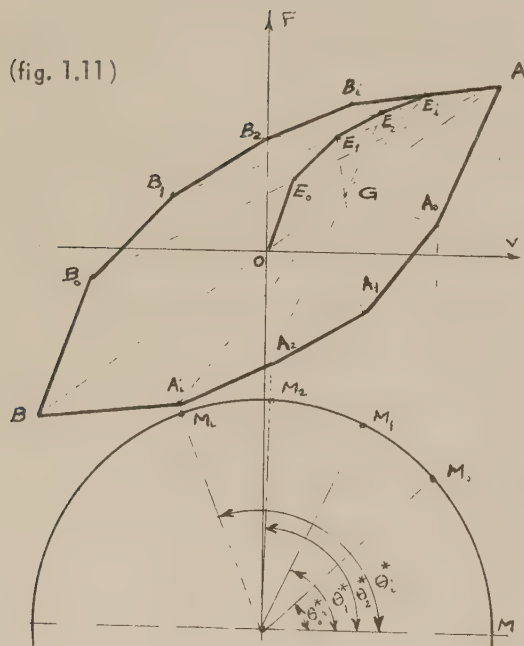
De même pour $A_0 A_1$:

$$A_0 A_1 : F = a_0 v + k_0 \quad \text{Avec en } A_0$$

$$k_0 + a_0(A - 2d_0) = a(A - 2d_0) + \lambda_m + (a_m - a)A$$

$$A_0 A_1 : F = a_0 v + (A - 2d_0)(a - a_0) + \lambda_m + (a_m - a)A$$

avec $\lambda_m = \frac{n+m}{n} \mu p b H \quad a_m = \frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} a$



De la même façon, nous pourrions écrire l'équation de $A_i A_{i+1}$:

$$A_i A_{i+1} : F = a_i v + k_i$$

avec :

$$k_i = \sum_{j=0}^{i-1} (a_{j+1} - a_j)(A - 2d_j) + \lambda_m + (a_m - a)A$$

avec :

$$a_{i+1} = a = \text{pente sans glissement}$$

$$d_i = \frac{F_i - \lambda_{i-1}}{a_{i-1}}$$

d'où finalement :

$$k_i = \sum_{j=1}^i \frac{3a}{4n^3} (n-j)(n-j+1)(A - 2d_j) + \lambda_m + (a_m - a)A + \frac{3aA}{4} \cos \theta_0 \quad (1.38)$$

L'angle θ_i^* correspondant au début de glissement dans l'interface i est défini par :

$$\cos \theta_i^* = \frac{A - 2d_i}{A} \quad (1.39)$$

La détermination du cycle étant faite, on peut passer au calcul des quantités $C(A)$ et $S(A)$.

b) Calcul de $C(A)$ et de $S(A)$:

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } C(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \theta) \cos \theta d\theta \\ \int_0^\pi f(A, \theta) \cos \theta d\theta &= \int_0^{\theta_0^*} (a_{-1} A \cos \theta + k_{-1}) \cos \theta d\theta + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\theta_i^*}^{\theta_{i+1}^*} (a_i A \cos \theta + k_i) \cos \theta d\theta \\ &\quad + \int_{\theta_m}^\pi (a_m A \cos \theta + k_m) \cos \theta d\theta \\ \int_{\theta_i^*}^{\theta_{i+1}^*} (a_i A \cos \theta + k_i) \cos \theta d\theta &= k_i (\sin \theta_{i+1}^* - \sin \theta_i^*) + \frac{a_i A}{2} \left[\theta_{i+1}^* - \theta_i^* + \frac{\sin 2\theta_{i+1}^* - \sin 2\theta_i^*}{2} \right] \\ \int_0^{\theta_0^*} (a_{-1} A \cos \theta + k_{-1}) \cos \theta d\theta &= k_{-1} \sin \theta_0^* + \frac{a_{-1} A}{2} \left(\theta_0^* + \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right) \\ \int_{\theta_m}^\pi (a_m A \cos \theta + k_m) \cos \theta d\theta &= -k_m \sin \theta_m^* + \frac{a_m A}{2} \left(\pi - \theta_m - \frac{\sin 2\theta_m^*}{2} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$C(A) = a_m A + \frac{A}{\pi} \sum_{i=0}^m \theta_i^* (a_{i-1} - a_i) + \frac{A}{2\pi} \sum_{i=0}^m \sin 2\theta_i^* (a_{i-1} - a_i) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^m \sin \theta_i^* (k_{i-1} - k_i)$$

Nous avons :

$$a_{i-1} - a_i = \frac{3a}{4n^3} (n-i)(n-i+1) \quad (1.40)$$

$$k_{i-1} - k_i = \frac{3a}{4n^3} (n-i)(n-i+1)(2d_i - A) \quad (1.41)$$

$$C(A) = A a_m + \frac{A}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{3a}{4n^3} (n-i)(n-i+1) \theta_i^* - \frac{3aA}{8\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) \sin 2\theta_i^* + \frac{3aA}{4\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right)$$

$$\text{Nous calculons de la même manière } S(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A, \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(A, \theta) \sin \theta d\theta &= \int_0^{\theta_0^*} (a_{-1} A \cos \theta + k_{-1}) \sin \theta d\theta + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\theta_i^*}^{\theta_{i+1}^*} (a_i A \cos \theta + k_i) \sin \theta d\theta + \int_{\theta_m}^\pi (a_m A \cos \theta + k_m) \sin \theta d\theta \\ \int_{\theta_i^*}^{\theta_{i+1}^*} (a_i A \cos \theta + k_i) \sin \theta d\theta &= \frac{a_i A}{2} (\sin^2 \theta_{i+1}^* - \sin^2 \theta_i^*) + k_i (\cos \theta_i^* - \cos \theta_{i+1}^*) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\theta_0^*} (a_{-1} A \cos \theta + k_{-1}) \sin \theta d\theta = \frac{a_{-1} A}{2} \sin^2 \theta_0^* + k_{-1} (1 - \cos \theta_0^*)$$

$$\int_{\theta_m^*}^{\pi} (a_m A \cos \theta + k_m) \sin \theta d\theta = -\frac{a_m A}{2} \sin^2 \theta_m^* + k_m (1 + \cos \theta_m^*)$$

$$S(A) = \frac{2}{\pi} (k_{-1} + k_m) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^m (k_{i-1} - k_i) \cos \theta_i^* + \frac{A}{\pi} \sum_{i=0}^m \sin^2 \theta_i^* (a_{i-1} - a_i)$$

ou, en remplaçant $(a_{i-1} - a_i)$ et $(k_{i-1} - k_i)$ par leurs expressions :

$$S(A) = \frac{2}{\pi} (k_{-1} + k_m) + \frac{3aA}{4\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1)(1 + \cos^2 \theta_i^*) + \frac{3aA}{4\pi} (1 + \cos^2 \theta_0^*)$$

Finalement :

$$C(A) = A a_m + \frac{3aA}{4\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(\theta_i^* - \frac{\sin 2 \theta_i^*}{2})(n-i+1) + \frac{3aA}{4\pi} (\theta_0^* - \frac{\sin 2 \theta_0^*}{2}) \quad (1.42)$$

$$S(A) = \frac{3aA}{2\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) - \frac{3aA}{4\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) \sin^2 \theta_i^* + \frac{2}{\pi} (k_{-1} + k_m) + \frac{3aA}{4\pi} (1 + \cos^2 \theta_0^*) \quad (1.43)$$

$$\text{avec } k_{-1} = k = \left[\frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} - 1 \right] aA + \frac{n+m}{n} \mu_{pbH}$$

c) Résonance :

Nous avons trouvé dans le cas général :

$$\omega^2 = \frac{C(A_0)}{A_0} \pm \left[\left(\frac{E}{A_0} \right)^2 - \left(\frac{S(A_0)}{A_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

On a résonance pour

$$\omega_r^2 = \frac{C(A_0)}{A_0} + \frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} a + \frac{3a}{4\pi n^3} \sum_{i=0}^m (n-i)(n-i+1) (\theta_i^* - \frac{\sin 2 \theta_i^*}{2}) \quad (1.44)$$

$$\text{car } a_m = \frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} a$$

d) Calcul de $C(A)$ et de $S(A)$ en considérant l'enveloppe

Nous avons vu que l'équation de l'enveloppe de $E_0 E_1 \dots E_i \dots E_m A$ peut

$$\text{s'écrire sous la forme : } F = -\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4n^2}{3av} \mu_{pbH}} \left(\frac{av}{6n^3} + \frac{2\mu_{pbH}}{3n} \right) + 2\mu_{pbH} + \frac{av}{4n^2}$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe de $B_0 B_1 \dots B_i \dots B_m$, nous allons écrire :

$$\frac{A+v}{2} B_i = v E_i \quad \frac{F_M + F_{B_i}}{2} = F_{E_i}$$

$$F_M = F_{\text{maximum}} = \frac{(n-m)^3+m}{4n^3} aA + \frac{n+m}{n} \mu pbH$$

D'où : $B_0 B_1 \dots B_i \dots B_m$:

$$\frac{F}{2} + \frac{(n-m)^3+m}{8n^3} aA + \frac{n+m}{2n} \mu pbH = -\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{8n^2}{3a(A+v)} \mu pbH} \left(\frac{a(A+v)}{12n^3} + \frac{2\mu pbH}{3n} \right) + 3\mu pbH + \frac{a(v+A)}{8n^2} \quad (1.45)$$

L'enveloppe de $A_0 A_1 \dots A_i \dots A_m$ est symétrique de celle de $B_0 B_1 \dots B_i \dots B_m$ par rapport à l'origine; donc il faut changer v en $-v$ et F en $-F$: $A_0 A_1 \dots A_i \dots A_m$:

$$F = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{8n^2}{3a(A-v)} \mu pbH} \left(\frac{a(A-v)}{6n^3} + \frac{4\mu pbH}{3n} \right) - \frac{a(A-v)}{4n^2} - 4\mu pbH + \frac{n+m}{n} \mu pbH + \frac{(n-m)^3+m}{4n^3} aA \quad (1.46)$$

équation que nous pouvons encore écrire :

$$F = \sqrt{\frac{\beta^2}{3} (A-v)^2 + \alpha \beta (A-v)} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{3} + \frac{\alpha \gamma^2}{A-v} - \delta (A-v) + R_m}$$

Le calcul de $C(A)$ et de $S(A)$ est ramené au calcul des intégrales suivantes :

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \beta \sqrt{\frac{A^2}{3} (1-\cos \theta)^2 + \alpha A (1-\cos \theta)} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi} \beta \sqrt{\left(\frac{A^2}{3} + \alpha A\right) - \left(\frac{2A^2}{3} + \alpha A\right) \cos \theta + \frac{A^2}{3} \cos^2 \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \gamma \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{A(1-\cos \theta)}} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi} \gamma \sqrt{\frac{(A+3\alpha) - A \cos \theta}{3A(1-\cos \theta)}} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

Le calcul de ces intégrales sous cette forme générale n'est pas très simple. Seulement, ce calcul nous paraît avantageux dans le cas où n est assez grand pour pouvoir écrire $n \rightarrow \infty$.

2 - Etude particulière pour n très grand :

a) Calcul en considérant l'enveloppe .

Lorsque $n \rightarrow \infty$, nous pouvons chercher les enveloppes de $B_0 B_1 \dots B_i \dots B_m$ et de $A_0 A_1 \dots A_i \dots A_m$ en prenant les limites des expressions (1.45) et (1.46)

$$(E) : E_0 E_1 \dots E_i \dots E_m : \quad F = G_0 \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G_0}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} \right]$$

$$(B) : B_0 B_1 \dots B_i \dots B_m : \quad F = G_0 \left(3 - \sqrt{\frac{2G_0}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v+A}} \right) - F_M \quad (1.47)$$

$$(A) : A_0 A_1 \dots A_i \dots A_m : \quad F = F_M - G_0 \left(3 - \sqrt{\frac{2G_0}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A-v}} \right) \quad (1.48)$$

avec

$$F_M = \frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} aA + \frac{n+m}{n} \mu p b H \quad G_0 = \frac{4}{3} \mu p b H$$

Si $m = n-1$ par exemple et A reste finie $F_M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \mu p b H$

L'équation (45) peut encore s'écrire :

$$F = (F_M - 3G_0) + G_0 \sqrt{\frac{2G_0}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A-v}} \quad (1.49)$$

Calcul de $C(A)$ et de $S(A)$:

$$C(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0^*} (a_{-1} A \cos \theta + k_{-1}) \cos \theta d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\pi} (F_M - 3G_0) \cos \theta d\theta + \frac{2}{\pi} G_0 \sqrt{\frac{2G_0}{aA}} \int_{\theta_0^*}^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}}$$

$$S(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0^*} (a_{-1} A \cos \theta + k_{-1}) \sin \theta d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\pi} (F_M - 3G_0) \sin \theta d\theta + \frac{2}{\pi} G_0 \sqrt{\frac{2G_0}{aA}} \int_{\theta_0^*}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}}$$

avec

$$a_{-1} = a \quad k_{-1} = k = F_M - aA$$

Pour le calcul des dernières intégrales dans les deux expressions nous pouvons poser :

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \text{ d'où :}$$

$$\int_{\theta_0^*}^{\pi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} d\theta = -\sqrt{2} \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\theta_0^*}{4} - 2\sqrt{2} \cos \frac{\theta_0^*}{2}$$

$$\int_{\theta_0^*}^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}} d\theta = 2\sqrt{2} \left(1 - \sin \frac{\theta_0^*}{2} \right)$$

Finalement, nous avons :

$$C(A) = \frac{2}{\pi} (3G_0 - aA) \sin \theta_0^* + \frac{aA}{\pi} \left(\theta_0^* + \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right) - \frac{4G_0}{\pi} \sqrt{\frac{G_0}{aA}} \left(\text{Log tg } \frac{\theta_0^*}{4} + 2 \cos \frac{\theta_0^*}{2} \right) \quad (1.50)$$

$$S(A) = \frac{2}{\pi} (2F_M - 3G_0 - aA) + \frac{2}{\pi} (aA - 3G_0) \cos \theta_0^* + \frac{8G_0}{\pi} \sqrt{\frac{G_0}{aA}} \left(1 - \sin \frac{\theta_0^*}{2} \right) + \frac{aA}{\pi} \sin^2 \theta_0^* \quad (1.51)$$

Nous pouvons remplacer $G_0 = ad_0$ et $\cos \theta_0^* = \frac{A-2d_0}{A}$

Fréquence de résonance :

Elle est obtenue à partir de $\omega^2 = \frac{C(A)}{A}$

soit :

$$\omega^2 = \frac{2a}{A\pi} (3d_0 - A) \sin \theta_0^* + \frac{a}{\pi} \left(\theta_0^* + \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right) - \frac{4ad_0}{\pi A} \sqrt{\frac{d_0}{A}} \left(\text{Log tg } \frac{\theta_0^*}{4} + 2 \cos \frac{\theta_0^*}{2} \right) \quad (1.52)$$

Supposons que $\frac{d_0}{A} \ll 1$ pour que l'on puisse le négliger :

$$C(A) = \frac{2aA}{\pi} [-\cos \theta_0^* \sin \theta_0^* + \frac{d_0}{A} \sin \theta_0^*] + \frac{aA}{\pi} \left(\theta_0^* + \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right) - \frac{4ad_0}{\pi} \sqrt{\frac{d_0}{A}} \left(\text{Log tg } \frac{\theta_0^*}{4} + 2 \cos \frac{\theta_0^*}{2} \right)$$

si $\frac{d_0}{A} \rightarrow 0$

$$C(A) \rightarrow \frac{aA}{\pi} \left[\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right] \quad (1.53)$$

$$S(A) = \frac{2A}{\pi} \left[\frac{2F_M}{A} - \frac{3ad_0}{A} - a \right] + \frac{2}{\pi} A a \left[\cos \theta_0^* - \frac{d_0}{A} \right] \cos \theta_0^* + \frac{8ad_0}{\pi} \sqrt{\frac{d_0}{A}} \left(1 - \sin \frac{\theta_0^*}{2} \right) + \frac{aA}{\pi} \sin^2 \theta_0^*$$

$$S(A) \rightarrow -\frac{2aA}{\pi} + \frac{2aA}{\pi} \cos^2 \theta_0^* + \frac{aA}{\pi} \sin^2 \theta_0^*$$

$$\text{soit} \quad S(A) \rightarrow -\frac{aA}{\pi} \sin^2 \theta_0^* \quad (1.54)$$

$$\text{et} \quad \omega_r^2 \rightarrow \frac{a}{\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right) \quad (1.55)$$

b) Calcul direct

Lorsque le nombre n est très grand, nous pouvons remplacer le cycle déterminé précédemment par un cycle plus simple ABCD (fig 1.12 page suivante) .

Dans ce cas, nous avons intérêt à faire le calcul de $C(A)$ et de $S(A)$ directement :

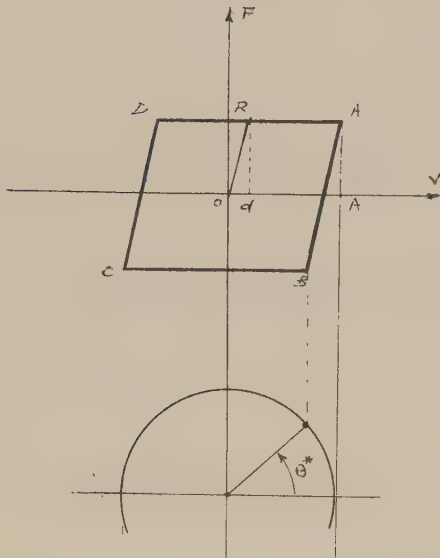


fig. 1.12

nous arriverons à

$$S(A) = -\frac{aA}{\pi} \sin^2 \theta^*$$

$$C(A) = \frac{aA}{\pi} \left(\theta^* - \frac{\sin 2\theta^*}{2} \right)$$

On retrouve donc les expressions (1.53) et (1.54) obtenues en considérant l'enveloppe. Dans ce cas $\theta^* \equiv \theta_0^*$ et $R \equiv G_0$.

c) *Instabilité du cycle pour $n \rightarrow \infty$ et $h \rightarrow 0$*

Nous avons trouvé précédemment que si le cycle adopté est celui de la fig. (1.11) nous aurons $R \equiv G_0$ ce qui signifie que le glissement se fait instantanément pour $F \equiv G_0$ en dynamique.

d) *Comparaison avec le cas de deux lames seulement :*

Si nous considérons le cas d'un système formé de deux lames seulement, nous pourrions faire le calcul assez facilement :

$$AB : F = av + R - aA$$

$$BC : F = -R$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$C(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta^*} [aA \cos \theta + R - aA] \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} R \int_{\theta^*}^{\pi} \cos \theta d\theta$$

$$C(A) = \frac{aA}{\pi} \left(\theta^* + \frac{\sin 2\theta^*}{2} \right) + \frac{2}{\pi} (2R - aA) \sin \theta^*$$

De même :

$$S(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta^*} [aA \cos \theta + R - aA] \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} R \int_{\theta^*}^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$S(A) = \frac{aA}{\pi} \sin^2 \theta^* - \frac{2}{\pi} \cos \theta^* (2R - aA) - \frac{2}{\pi} aA$$

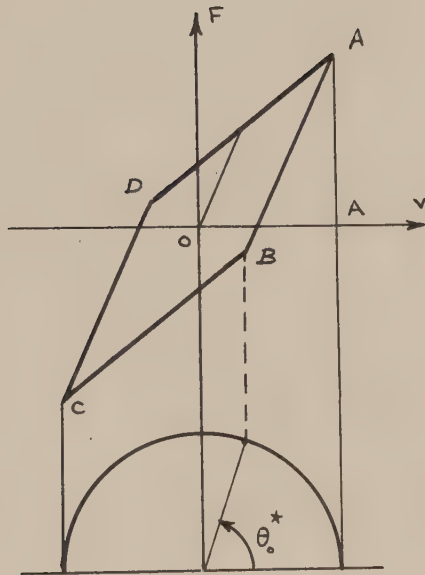
Si nous tenons compte de l'expression de $\cos \theta^*$:

$$\cos \theta^* = \frac{A - \frac{2R}{a}}{A} = \frac{A - 2d}{A}$$

$$\cos \theta_0^* = \frac{A - 2d_0}{A}$$

$$S(A) = -\frac{3aA}{4\pi} \sin^2 \theta_0^*$$

$$C(A) = \frac{aA}{4} + \frac{3aA}{4\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right)$$



(fig. 1.13)

Nous déduisons donc que :

$$E_1 = \frac{3}{4} E_\infty$$

$$\omega_{1r}^2 = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right)$$

Pour $n \rightarrow \infty$, nous avons :

$$\omega_{\infty r}^2 = \frac{a}{\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right)$$

donc :

$$\Delta(\omega_r^2) = \omega_{1r}^2 - \omega_{\infty r}^2 = \frac{a}{4} - \frac{a}{4\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right)$$

Théoriquement, pour n quelconque, nous devons avoir :

$$\omega_{\infty r}^2 \leq \omega_{nr}^2 \leq \omega_{1r}^2$$

3 . Courbes particulières

a) Courbes « squelettes »

L'expression $\omega_r^2 = \frac{C(A)}{A}$ nous permet de tracer la courbe lieu des points correspondants à la résonance de phase dans le plan (A, ω) . Cette courbe, que nous allons appeler « courbe squelette » peut être graduée en $E = S(A_0) =$ valeur de l'excitation qui donne une résonance de phase d'amplitude donnée fixée à l'avance .

Nous pouvons tracer les courbes « squelettes » pour $n=1$ et $n=\infty$, en utilisant des coordonnées réduites :

- Unité de déplacement : valeur de la flèche au début du glissement ,
- Unité de force : $G_0 =$ force au début du glissement ,

ce qui signifie que la résonance de phase avant glissement a lieu pour $\omega^2 = 1$ ($a=1$) .

L'asymptote de la courbe « squelette » a pour équation $\omega^2 = \frac{1}{N^2}$ si le glissement total est atteint et $\omega^2 = a_m$ si le glissement atteint le niveau m . Pour un nombre n quelconque, la courbe « squelette » correspondante est nécessairement entre les deux courbes tracées pour $n=1$ et $n=\infty$.

Autre propriété : connaissant la courbe squelette expérimentale, nous pouvons connaître, théoriquement, le niveau du glissement atteint en traçant l'asymptote approximative ayant pour équation

$$\omega^2 = \frac{1}{N^2} \quad \text{ou} \quad \omega^2 = a_m \quad (1.56)$$

Voir graphique I. 1.

b. Lieu des points à tangentes verticales :

Le lieu des points à tangente verticale est donné par :

$$\left(\frac{\partial(\omega^2)}{\partial A} \right)_{A=A_0} = 0$$

avec

$$\omega^2 = \frac{C(A_0)}{A_0} \pm \left[\left(\frac{E}{A_0} \right)^2 - \left(\frac{S(A_0)}{A_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Tout calcul fait, nous arrivons à

$$(\omega_v^2 - \omega_r^2)^2 - (\omega_v^2 - \omega_r^2) A_0 \left(\frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] \right)_{A=A_0} + \frac{S(A_0)}{A_0} \cdot \left(\frac{\partial S(A)}{\partial A} \right)_{A=A_0} = 0 \quad (1.57)$$

ou

$$\omega_v^2 = \omega_r^2 + \frac{A_0 \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] \pm \sqrt{\left\{ A_0 \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] \right\}^2 - 4 \frac{S(A_0)}{A_0} \cdot \frac{\partial S(A)}{\partial A}}}{2} \quad (1.58)$$

Nous avons $\cos \theta_i^* = 1 - \frac{2 d_i}{A}$

$$\frac{\partial}{\partial A} (\cos \theta_i^*) = 2 \frac{d_i}{A^2} = \frac{1 - \cos \theta_i^*}{A}$$

d'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial A} (\cos \theta_i^*) = -\sin \theta_i^* \frac{\partial \theta_i^*}{\partial A}$$

d'où :

$$\frac{\partial \theta_i^*}{\partial A} = \frac{\cos \theta_i^* - 1}{A \sin \theta_i^*}$$

$$\frac{\partial}{\partial A} (\sin \theta_i^*) = \frac{\partial}{\partial \theta_i^*} (\sin \theta_i^*) \frac{\partial \theta_i^*}{\partial A} = \frac{\cos^2 \theta_i^* - \cos \theta_i^*}{A \sin \theta_i^*}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] = \frac{3a}{2\pi n^3 A} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) \left(\frac{\sin 2\theta_i^*}{2} - \sin \theta_i^* \right) + \frac{3a}{2\pi A} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right) \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial S(A)}{\partial A} = - \frac{3a}{4\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) (1 - \cos \theta_i^*)^2 - \frac{3a}{4\pi} (1 - \cos \theta_0^*)^2 \quad (1.60)$$

$$+ \frac{1}{\pi} (4a_m - a) + \frac{3a}{\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1)$$

CAS PARTICULIERS

$\alpha)$ $n=1$

$$C(A) = \frac{aA}{4} + \frac{3aA}{4\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right)$$

$$S(A) = - \frac{3aA}{4\pi} \sin^2 \theta_0^*$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] = \frac{3a}{2\pi a} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right)$$

$$\frac{\partial S(A)}{\partial A} = - \frac{3a}{4\pi} (1 - \cos \theta_0^*)^2$$

L'équation donnant ω_v^2 devient un carré parfait :

$$\left[(\omega_0^2 - \omega_r^2) - \frac{3a}{4\pi} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right) \right]^2 = 0$$

$$\text{d'où} \quad \omega_v^2 = \omega_r^2 + \frac{3a}{4\pi} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right)$$

$\beta)$ $n = \infty$

$$C(A) = \frac{aA}{\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right)$$

$$S(A) = - \frac{aA}{\pi} \sin^2 \theta_0^*$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] = \frac{2a}{\pi A} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right)$$

$$\frac{\partial S(A)}{\partial A} = - \frac{a}{\pi} (1 - \cos \theta_0^*)^2$$

L'équation donnant ω_v^2 est aussi un carré parfait :

$$\left[(\omega_v^2 - \omega_r^2) - \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right) \right]^2 = 0$$

d'où :

$$\omega_v^2 = \omega_r^2 + \frac{a}{\pi} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right)$$

$\gamma) n=2$

$$C(A) = \frac{aA}{16} + \frac{3aA}{4\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right) + \frac{3aA}{16\pi} \left(\theta_1^* - \frac{\sin 2\theta_1^*}{2} \right)$$

$$S(A) = -\frac{3aA}{4\pi} \sin^2 \theta_0^* - \frac{3aA}{16\pi} \sin^2 \theta_1^*$$

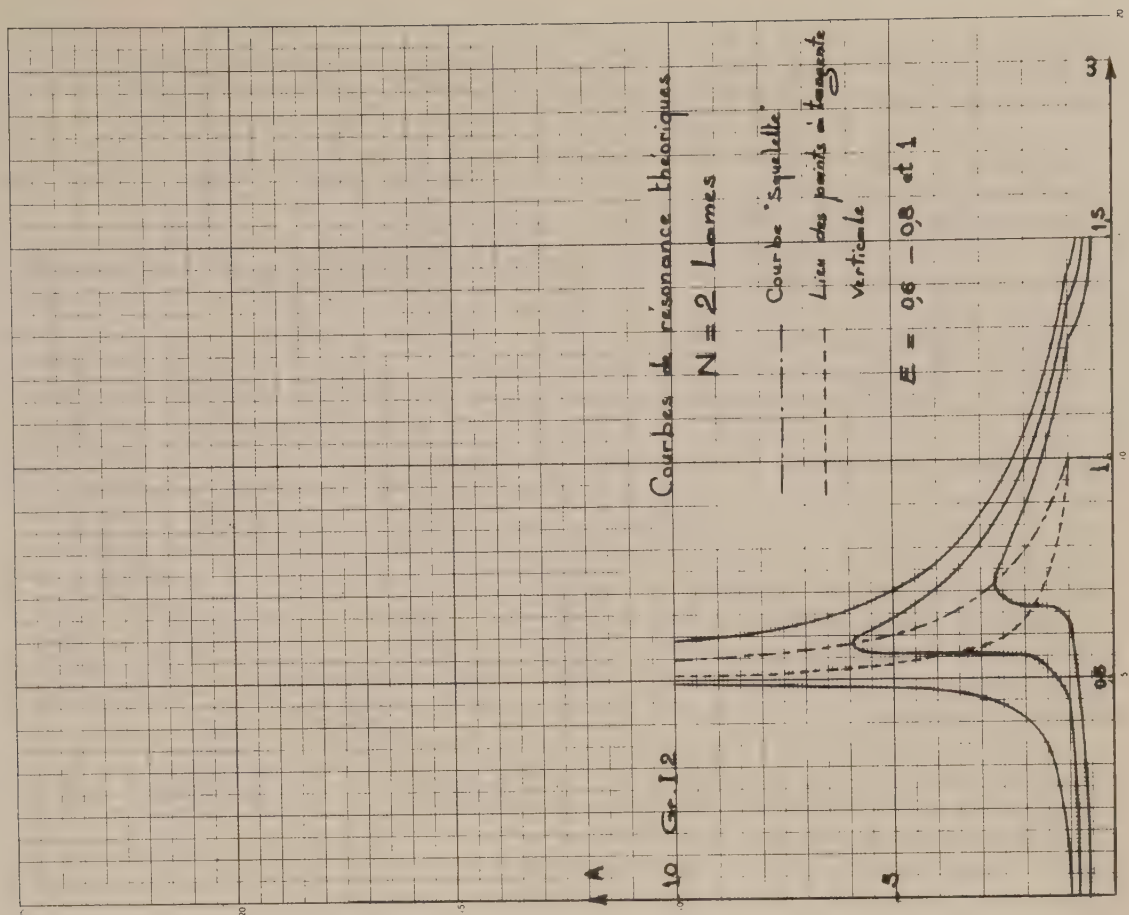
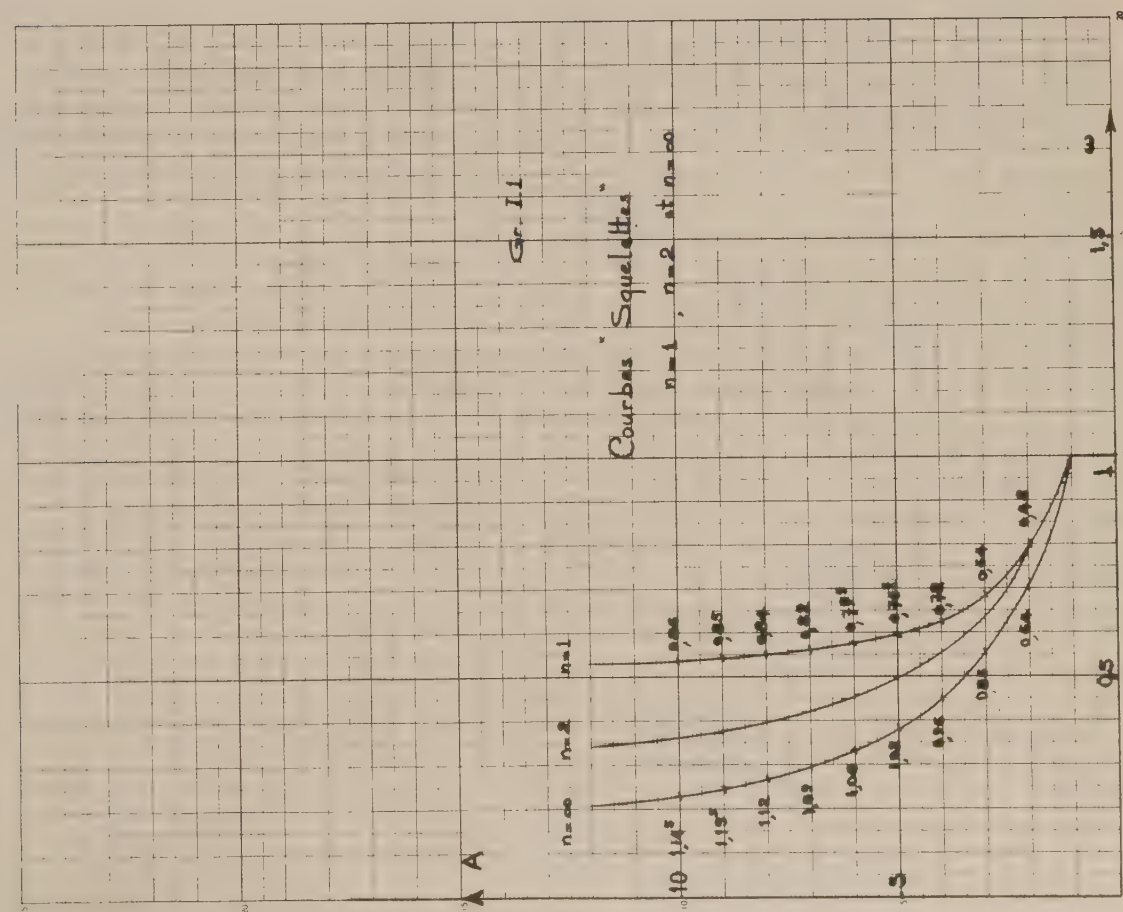
$$d_1 = 2 d_0$$

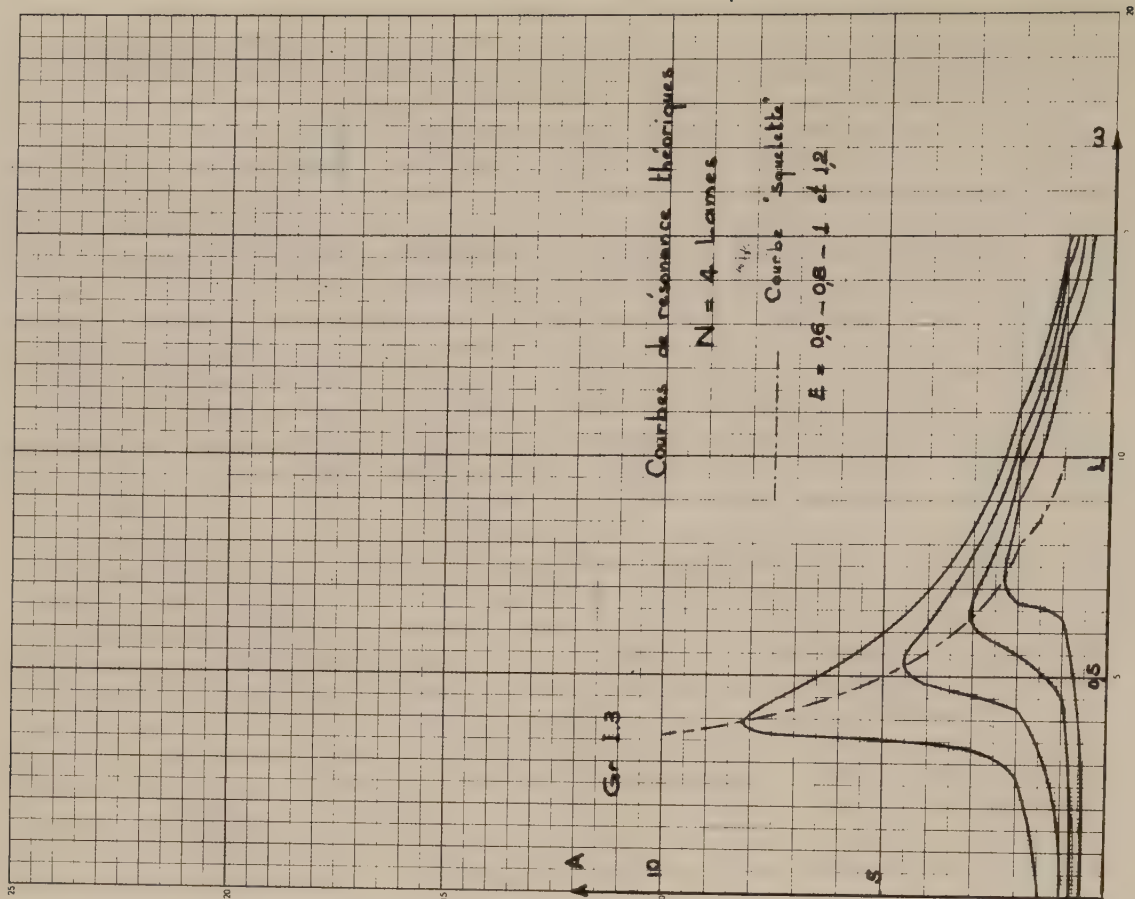
$$\frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] = \frac{3a}{2\pi A} \left(\frac{\sin 2\theta_0^*}{2} - \sin \theta_0^* \right) + \frac{3a}{8\pi A} \left(\frac{\sin 2\theta_1^*}{2} - \sin \theta_1^* \right)$$

$$\frac{\partial S(A)}{\partial A} = -\frac{3a}{4\pi} (1 - \cos \theta_0^*)^2 - \frac{3a}{16\pi} (1 - \cos \theta_1^*)^2$$

Le calcul nous montre que pour $d_0 < A < 10 d_0$, il n'y a pas de points à tangentes verticales possibles

(voir graphiques 1.2 et 1.3)





4) Interprétation physique de $C(A)$ et de $S(A)$:

La méthode utilisée dite de l'équilibre harmonique ne diffère pas de la méthode de linéarisation équivalente; en effet, si l'on considère le mouvement d'oscillations libres définies par l'équation :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x, x') = 0$$

cette équation peut être remplacée par :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + B_e(A) \frac{dx}{dt} + K_e(A) \cdot x = \varepsilon$$

où K_e et B_e sont la raideur et la constante d'amortissement équivalentes définies par :

$$B_e(A) = -\frac{1}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} f \cdot \sin \theta d\theta = -\frac{S(A)}{A \omega}$$

$$K_e(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f \cdot \cos \theta d\theta = \frac{C(A)}{A}$$

Cette méthode n'est autre que l'approximation du premier harmonique, car elle revient à remplacer $f(x, x')$ par une force équivalente $F_e = K_e(A)x + B_e(A) \frac{dx}{dt}$ et si nous supposons que $x = A \cos \theta$, nous arriverons à :

$$F_e = \frac{C(A)}{A} \cdot A \cos \theta + \frac{S(A)}{A \omega} \omega A \sin \theta = C(A) \cos \theta + S(A) \sin \theta$$

Ce sont les deux premiers termes du développement de $f(x, x')$ en série de Fourier.

Nous concluons donc que $S(A)$ et $C(A)$ sont liées respectivement à la constante d'amortissement et à la raideur équivalentes. Nous allons utiliser cette propriété pour pouvoir calculer $C(A)$ et $S(A)$ à partir des essais statiques puis tracer les courbes de résonance à partir de ces mêmes essais.

Calculons $S(A)$ et $C(A)$ à partir des essais statiques

a) Calcul de $S(A)$:

Dans le cas d'un amortissement visqueux, le diagramme dans le plan (Force - déplacement) est une ellipse inclinée dont le grand axe a pour équation $F = Kx$. L'aire de cette ellipse exprime l'énergie dissipée par cycle. Dans notre cas, le diagramme est un polygone (parallélogramme dans le cas où $n=1$) ; nous allons lier $S(A)$ à sa surface et $C(A)$ à l'inclinaison de sa grande diagonale.

L'expression de l'énergie dissipée par cycle est la suivante :

$$D = \pi B_e \omega A^2 = \pi A \cdot S(A)$$

d'où :

$$S(A) = \frac{D}{\pi A} \quad (1.61)$$

D s'exprime par l'aire du diagramme dont son expression générale est donnée par :

$$D_m = \frac{8}{3E} \mu p b L^3 \{ |A_m - B_m h| + (2m-1)h |B_m| \}$$

Connaissant D correspondant à F_m , donc à une amplitude A donnée, nous pouvons avoir la valeur exacte de $S(A)$ comme nous allons le constater :

$\alpha)$ Cas où $n=1$

$$D = \frac{4}{3E} \mu p b L^2 \left(\frac{6FL}{bh^2} - \frac{8\mu p L}{h} \right)$$

ou
$$D = \frac{12 G_o^2}{K} \left(\frac{F_m}{G_o} - 1 \right)$$

avec $K = \text{raideur avant glissement}$

En coordonnées réduites : $K=1$ $G_o=1$

$$D = 12 (F_m - 1)$$

mais
$$F_m = \frac{A}{4} + \frac{3}{4}$$

d'où
$$D = 3 (A - 1)$$

et
$$S(A) = \frac{3(A-1)}{\pi A}$$

En comparant avec l'expression exacte de $S(A)$ qui est la suivante en coordonnées réduites :

$$|S(A)| = \frac{3A}{4\pi} \sin^2 \theta_o^*$$

avec $\sin^2 \theta_o^* = 1 - \left(1 - \frac{2}{A}\right)^2 = \frac{4}{A} \left(1 - \frac{1}{A}\right)$

$$|S(A)| = \frac{3A}{4\pi} \cdot \frac{4}{A^2} (A-1) = \frac{3(A-1)}{\pi A}$$

nous trouvons donc la même expression et la valeur obtenue à partir des essais statiques est bien la valeur exacte en valeur absolue .

$\beta)$ Cas où $n=2$

Le glissement est supposé total .

Nous avons :

$$D_{n=1} = \frac{8}{3E} \mu p b L^3 \left\{ \left| \frac{6F}{nbh^2} - \frac{\mu p}{h} \right| + (2n-3)h \left| \frac{3(2n-1)}{n} \cdot \frac{\mu p}{h^2} - \frac{3F}{nbh^3} \right| \right\}$$

Pour $n=2$

$$D_1 = \frac{8}{3E} \mu p b L^3 \left\{ \left| \frac{3F}{bh^2} - \frac{\mu p}{h} \right| + \left| \frac{9}{2} \cdot \frac{\mu p}{h} - \frac{3F}{2bh^2} \right| \right\}$$

En coordonnées réduites :

si $2h=H$ nous avons $\frac{2EbH^3}{L^3} = \text{raideur avant glissement} = 1$

$$G_0 = \frac{4}{3} \mu p b H = \frac{8}{3} \mu p b h = 1$$

$$D_1 = 3 (24 F_m - 29)$$

$$\text{mais } F = \frac{y}{16} + \frac{3}{4} + \frac{3d_1}{16} \quad \text{d'où} \quad F_m = \frac{A}{16} + \frac{9}{8}$$

$$\text{car } d_1 = 2 d_0 = 2$$

$$\text{et finalement : } D_1 = 3 (1,5 A - 2)$$

ce qui nous donne :

$$S(A) = \frac{3 (1,5 A - 2)}{\pi A}$$

La valeur exacte de $S(A)$ en valeur absolue est la suivante :

$$|S(A)| = \frac{3A}{4\pi} \left(\sin^2 \theta_0^* + \frac{\sin^2 \theta_1^*}{4} \right)$$

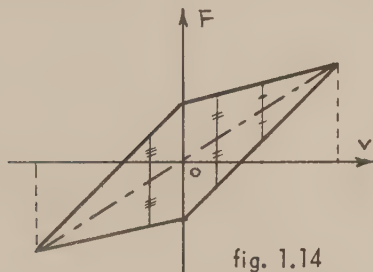
$$\text{avec } \sin^2 \theta_0^* = \frac{4(A-1)}{A^2} \quad \sin^2 \theta_1^* = \frac{8(A-2)}{A^2}$$

$$|S(A)| = \frac{3A}{4\pi} \left[\frac{4(A-1)}{A^2} + \frac{2(A-2)}{A^2} \right] = \frac{3(1,5 A - 2)}{\pi A}$$

Donc, l'étude statique nous donne la valeur exacte de $S(A)$

b) Calcul de $C(A)$

$C(A)$ est liée à la raideur équivalente, ce qui nous conduit à penser, par analogie avec le cas de l'amortissement visqueux, à la pente de la diagonale, mais le calcul nous montre que la valeur obtenue est toujours supérieure à $\frac{C(A)}{A}$ sauf pour $A=2$, auquel cas nous obtenons la valeur exacte du fait de la symétrie particulière du cycle (fig. 1.14) (une parallèle à l'axe des forces est divisée en deux parties égales par la diagonale : c'est une propriété de l'ellipse -diagramme dans le cas de l'amortissement visqueux).



Dans les autres cas, l'erreur peut atteindre 12 % pour $n=1$ et $A < 10$ et devient plus importante pour $n > 1$.

Nous avons :

$$K_{e1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4A} \quad \text{pour } n=1$$

$$K_{e2} = \frac{1}{16} + \frac{9}{8A} \quad \text{pour } n=2$$

Il est possible d'améliorer la valeur de la raideur équivalente en faisant intervenir un « coefficient d'amortissement hystérétique ». En effet, dans le cas d'un amortissement visqueux, l'expression de l'énergie dissipée peut s'écrire :

$$D = \pi b \omega A^2 = \text{aire du cycle (ellipse)}$$

Pour que l'aire soit indépendante de la fréquence (propriété particulière d'un système à hystérésis), nous pouvons prendre comme force d'amortissement, non pas bx mais $\frac{hx}{\omega}$, h étant le « coefficient d'amortissement hystérétique ».

Par comparaison avec notre cas, nous trouvons $h = \frac{S(A)}{A}$. Ceci étant, nous pouvons définir alors une raideur complexe :

$$K^* = K_e + ih \quad i = \sqrt{-1}$$

c'est-à-dire que $K_e^2 = |K^*|^2 - h^2$. En considérant $|K^*|$ = pente de la grande diagonale du cycle, nous pouvons calculer K_e .

Les valeurs trouvées dans le cas où $n=1$ et pour $3 < A < 10$ sont égales aux valeurs de $\frac{C(A)}{A}$ avec un écart maximal de 8 %.

Cette remarque sur la liaison entre $C(A)$ et $S(A)$ et les constantes équivalentes nous révèle le caractère approché de la méthode de BOGOLIUBOV et KRYLOV et nous montre que l'erreur résultante de l'application de cette méthode est due seulement à l'estimation de la raideur équivalente.

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \quad \div \\ \div \end{array}$$

III - STABILITE DU REGIME STATIONNAIRE

1 - Etude générale :

a) Equation de la stabilité :

Nous avons désigné par A_0 et φ_0 , l'amplitude et le déphasage en régime stationnaire. Si, à partir de cet état, nous créons une faible perturbation, nous aurons :

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \eta \\ \varphi &= \varphi_0 + \psi \end{aligned} \quad (1.62)$$

L'équation (1.30) nous donne :

$$-2\omega\dot{\eta} + S(A_0 + \eta) = E \sin(\varphi_0 + \psi) = E [\sin \varphi_0 \cos \psi + \cos \varphi_0 \sin \psi]$$

et d'après (1.32) $S(A_0) = E \sin \varphi_0$

Comme η et ψ sont faibles, nous pouvons écrire :

$$S(A_0 + \eta) = S(A_0) + \eta \frac{\partial S}{\partial A} \quad (1.63)$$

d'où finalement :

$$-2\omega\dot{\eta} + \eta \frac{\partial S}{\partial A} = \psi E \cos \varphi_0$$

qui peut encore s'écrire, d'après (1.33)

$$-2\omega\dot{\eta} + \eta \frac{\partial S}{\partial A} = \psi [C(A_0) - \omega^2 A_0] \quad (1.64)$$

De la même façon, (1.31) et (1.33) nous permettent d'avoir :

$$-\omega^2 \eta - 2\omega\dot{\psi} A_0 + \eta \frac{\partial C}{\partial A} = -\psi E \sin \varphi_0$$

qui s'écrit encore, d'après (1.32) :

$$\left(-\omega^2 + \frac{\partial C}{\partial A}\right) \eta = 2\omega A_0 \dot{\psi} - \psi S(A_0) \quad (1.65)$$

Supposons $\eta = \eta_0 e^{\lambda t}$ $\psi = \psi_0 e^{\lambda t}$ $\dot{\eta} = \lambda \eta_0 e^{\lambda t}$ $\dot{\psi} = \lambda \psi_0 e^{\lambda t}$ (1.66)

Remplaçons dans (1.64) et (1.65), nous obtenons :

$$\begin{aligned} -2\omega\lambda\eta_0 + \eta_0 \frac{\partial S}{\partial A} &= \psi_0 [C(A_0) - \omega^2 A_0] \\ \left(-\omega^2 + \frac{\partial C}{\partial A}\right) \eta_0 &= 2\omega A_0 \psi_0 \lambda - \psi_0 S(A_0) \end{aligned}$$

La première équation nous donne :

$$\frac{\psi_0}{\eta_0} = \frac{\frac{\partial S}{\partial A} - 2 \omega \lambda}{C(A_0) - \omega^2 A_0}$$

et la deuxième :

$$\frac{\psi_0}{\eta_0} = \frac{-\frac{\partial C}{\partial A} + \omega^2}{-2 \omega A_0 \lambda + S(A_0)}$$

En exprimant qu'il s'agit de la même quantité, nous obtenons l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial A} - 2 \omega \lambda \right) \left(\frac{S(A_0)}{A_0} - 2 \omega \lambda A_0 \right) - (\omega^2 - \frac{\partial C}{\partial A}) \left(\frac{C(A_0)}{A_0} - \omega^2 A_0 \right) = 0$$

ou encore :

$$(2\omega\lambda)^2 - 2\omega\lambda \left[\frac{S(A_0)}{A_0} + \frac{\partial S}{\partial A} \right] + \frac{S(A_0)}{A_0} \cdot \frac{\partial S}{\partial A} + \left[\frac{C(A_0)}{A_0} - \omega^2 \right] \left(\frac{\partial C}{\partial A} - \omega^2 \right) = 0 \quad (1.67)$$

Equation du second degré en $2\omega\lambda$

$$2\omega\lambda = \frac{1}{2} \left[\frac{S(A_0)}{A_0} + \frac{\partial S}{\partial A} \right] \pm \left[\frac{1}{4} \left[\frac{S(A_0)}{A_0} + \frac{\partial S}{\partial A} \right]^2 - \frac{S(A_0)}{A_0} \cdot \frac{\partial S}{\partial A} - \left[\frac{C(A_0)}{A_0} - \omega^2 \right] \left(\frac{\partial C}{\partial A} - \omega^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.68)$$

Si $\lambda > 0$ le régime stationnaire est instable

Si $\lambda < 0$ le régime stationnaire est stable

L'équation de la stabilité (1.67) peut encore s'écrire sous la forme :

$$(2\omega\lambda)^2 + (2\omega\lambda) \alpha + \beta = 0$$

Si le terme constant β est positif, le radical de (1.68) est inférieur à la quantité

$$\frac{1}{2} \left[\frac{S(A_0)}{A_0} + \frac{\partial S}{\partial A} \right] \text{ et tout revient à l'étude du signe de } \alpha.$$

b) Signification du terme constant :

Le terme constant $\beta = \left[\frac{C(A_0)}{A_0} - \omega^2 \right] \left(\frac{\partial C}{\partial A} - \omega^2 \right) + \frac{S(A_0)}{A_0} \cdot \frac{\partial S}{\partial A}$ peut encore

s'écrire :

$$\beta = (\omega^2 - \omega_r^2)^2 - (\omega^2 - \omega_r^2) A_0 \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{C(A)}{A} \right] + \frac{S(A_0)}{A_0} \cdot \frac{\partial S}{\partial A} \quad (1.69)$$

Nous retrouvons donc l'équation (1.57) donnant le lieu des points à tangentes verticales.

L'expression (1.69) de β est générale, valable dans tous les problèmes de mécanique non linéaire.

si $\beta < 0$: ω se trouve à l'intérieur de la région limitée par le lieu des points à tangente verticale ;

si $\beta > 0$: ω se trouve à l'extérieur de la région précédente

si $\beta = 0$: $\omega = \omega_v$

Il s'ensuit donc que la région limitée par le lieu des points à tangente verticale est une région d'instabilité. Dans notre cas, nous avons vu que le lieu des points à tangente verticale n'est pas une courbe fermée, donc ne limite aucune région et le régime stationnaire est stable si le signe de α est négatif.

c) Signe de $\frac{S(A_0)}{A_0} + \frac{\partial S}{\partial A}$

Nous avons :

$$S(A) = \frac{3aA}{4\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1)(1 + \cos \theta_i^*)^2 + \frac{3aA}{4\pi} (1 + \cos \theta_0^*)^2 + \frac{4}{\pi} (a_m - a)A + \frac{4}{\pi} \lambda_m$$

$$\frac{\partial S(A)}{\partial A} = -\frac{3a}{4\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1)(1 - \cos \theta_i^*)^2 - \frac{3a}{4\pi} (1 - \cos \theta_0^*)^2 + \frac{4}{\pi} (4a_m - a) + \frac{3a}{\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1)$$

Après transformation et en faisant apparaître l'expression de K_m , nous obtenons :

$$\frac{S(A)}{A} + \frac{\partial S(A)}{\partial A} = \frac{4}{\pi A} K_m + \frac{4}{\pi} (a_m - a) + \frac{3a}{\pi} + \frac{3a}{\pi n^3} \sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1)$$

Nous pouvons calculer facilement la somme $\sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1)$. En effet :

$$\sum_{i=0}^m (n-i)(n-i+1) = \sum_{i=1}^n i(i+1) - \sum_{i=1}^{n-m-1} i(i+1)$$

D'autre part :

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = \sum_{i=1}^n (i^2 + i) = \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i$$

et

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n-m-1} i(i+1) = \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{3}$$

et finalement :

$$\sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) = \frac{n(n+1)(n+2) - (n-m)^3 + (n-m)}{3} - n(n+1)$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-m)^3 + m}{3} + \frac{n}{3} - n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^m (n-i)(n-i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{4n^3}{3a} a_m + \frac{n}{3} - n(n+1)$$

$$\text{car } a_m = \frac{(n-m)^3 + m}{4n^3} a$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{S(A)}{A} + \frac{\partial S(A)}{\partial A} = \frac{4}{\pi A} K_m - \frac{4}{\pi} a + \frac{n(n+1)(n+2)}{\pi n^3} a + \frac{a}{\pi n^2} + \frac{3a}{\pi} - \frac{3n(n+1)}{\pi n^3} a$$

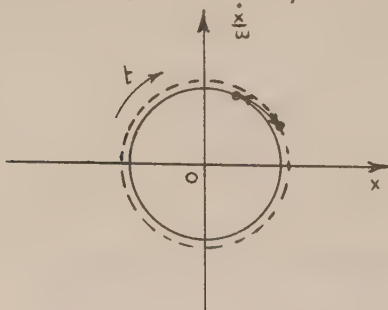
et finalement :

$$\frac{S(A)}{A} + \frac{\partial S(A)}{\partial A} = \frac{4}{\pi A} K_m \quad \text{toujours} < 0$$

Le régime stationnaire est donc toujours stable.

2 - Etude de la stabilité du régime stationnaire par les équations de MATHIEU .

L'étude précédente nous a montré que le régime stationnaire défini par $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ (avec $\dot{A} = 0$ et $\dot{\varphi} = 0$) est toujours stable c'est-à-dire que, sous l'action de faibles perturbations, l'amplitude et le déphasage restent voisins respectivement de A_0 et φ_0 . Dans l'étude suivante, nous allons constater que si le mouvement de perturbation est oscillatoire à faibles amplitudes et si A et φ restent voisins de A_0 et φ_0 , il y a une certaine région pour laquelle on ne retrouve pas la même courbe de résonance pour des fréquences croissantes ou pour des fréquences décroissantes et il y a un léger décalage entre les 2 courbes. Nous avons d'abord remarqué ce phénomène expérimentalement et nous allons l'expliquer dans ce qui suit en essayant d'étudier la stabilité du régime stationnaire par les équations de MATHIEU.



En fait, le mouvement du système peut être représenté par une courbe fermée dans le plan (vitesse-déplacement). Lorsqu'on étudie la stabilité, le point représentatif se trouve légèrement déplacé et il décrit ensuite une autre courbe fermée. Comme ce nouveau mouvement a une période différente de l'autre, les points en question décrivent les deux trajectoires avec des vitesses différentes. Donc le décalage signalé ci-dessus est dû simplement à un changement de vitesse suivant que le balayage en fréquences s'effectue dans le sens croissant ou dans le sens rétrograde.

a) L'équation de MATHIEU correspondante :

Donnons à la solution une perturbation $\varepsilon(t)$; nous avons ainsi :

$$y = A \cos \theta + \varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon(t) \quad (1.70)$$

u_0 vérifie l'équation (1.19)

Le développement en série de Taylor au voisinage de u_0 de la fonction $f(y, \dot{y})$ nous donne :

$$f(y, \dot{y}) = f(u_0) + \varepsilon f'_y(u_0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f''_{yy}(u_0) + \dots$$

et comme le cycle est multilinéaire, les dérivées d'ordre supérieur à un sont nulles ; il nous reste alors :

$$f(y, \dot{y}) = f(u_0) + \varepsilon f'_y(u_0) \quad (1.71)$$

Remplaçons $f(y, \dot{y})$ et y par leurs expressions dans l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2}{dt^2} u_0(t) + \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + f(u_0) + \varepsilon f'_y(u_0) = E \cos \omega t \quad (1.72)$$

L'équation (1.72) peut être remplacée par les deux équations suivantes :

$$\frac{d^2}{dt^2} u_0(t) + f(u_0) = E \cos \omega t \quad \text{identique à (1.19)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \varepsilon(t) + \varepsilon f'_y(u_0) = 0 \quad (1.73)$$

Cette équation nous donne $\varepsilon(t)$.

La fonction $f'_y(u_0)$ est une fonction « escalier » périodique en θ , de période π ; nous pouvons donc chercher son développement en série de Fourier (fig. 1.15)

Pour représenter $f'_y(u_0)$, nous avons intérêt à prendre des coordonnées réduites :

$$d_0 = 1 \quad a = 1 \quad \text{donc} \quad a_0 = \frac{1}{4} \dots \quad a_m = \frac{(n-m)^3 + n}{4n^3}$$

L'équation (73) peut encore s'écrire :

$$\frac{d^2 \varepsilon(\theta)}{d\theta^2} + \varepsilon f'_y(\theta) = 0 \quad (1.74)$$

Dans le développement en série de Fourier, nous avons, en supposant qu'il y a glissement jusqu'à l'interface (m) :

$$(A_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_y'(\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\theta_0^* + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) + a_m (\pi - \theta_m^*) \right]$$

$$(A_v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_y'(\theta) \cdot \cos 2v\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi v} \left[\sin 2v\theta_0^* + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (\sin 2v\theta_{i+1}^* - \sin 2v\theta_i^*) - a_m \sin 2v\theta_m^* \right]$$

$$(B_v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_y'(\theta) \cdot \sin 2v\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{\pi v} \left[\cos 2v\theta_0^* + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (\cos 2v\theta_{i+1}^* - \cos 2v\theta_i^*) - a_m (\cos 2v\theta_m^* - 1) \right]$$

et finalement :

$$f_y'(\theta) = \frac{1}{\pi} \left[\theta_0^* + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) + a_m (\pi - \theta_m^*) \right]$$

$$+ \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi v} \left[\sin 2v\theta_0^* + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (\sin 2v\theta_{i+1}^* - \sin 2v\theta_i^*) - a_m \sin 2v\theta_m^* \right] \cos 2v\theta \right.$$

$$\left. - \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi v} \left[\cos 2v\theta_0^* + \sum_{i=0}^{m-1} a_i (\cos 2v\theta_{i+1}^* - \cos 2v\theta_i^*) - a_m (\cos 2v\theta_m^* - 1) \right] \sin 2v\theta \right\} \right\} \quad (1.75)$$

$f_y'(\theta)$ est une fonction de la classe $[A_0]$; nous admettons donc que la série (1.75) est convergente .

Si nous remplaçons $f_y'(\theta)$ par son développement (75) avec $\theta = \omega t + \varphi$ dans (1.74), nous obtenons une équation de HILL .

Nous allons nous limiter aux premiers termes et écrire :

$$f_y'(\theta) \approx (A_0) + (A_1) \cos 2\theta + (B_1) \sin 2\theta \quad (1.76)$$

L'équation (7) s'écrit alors :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\theta^2} + \varepsilon \left[\frac{(A_0)}{\omega^2} + \frac{(A_1)}{\omega^2} \cos 2\theta + \frac{(B_1)}{\omega^2} \sin 2\theta \right] = 0$$

que nous pouvons encore écrire :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\theta_1^2} + \varepsilon (\delta^2 - 2\delta \cos 2\theta_1) = 0 \quad (1.77)$$

avec

$$\delta^2 = \frac{(A_0)}{\omega^2} \quad 2\delta = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}$$

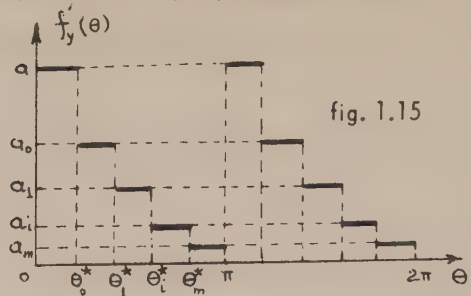


fig. 1.15

$\theta_1 = \text{variable auxiliaire} = \theta - \psi_1$ ($\psi_1 = \text{constante arbitrairement choisie}$)

L'équation (.77) est une équation de MATHIEU dont on connaît la stabilité de ses solutions.

Approximativement, les solutions de l'équation de MATHIEU sont essentiellement stables dans la petite région (D) limitée par :

$$\delta^1 > 0 \quad \delta^1 = \pm 2 \delta$$

et l'étude de stabilité faite précédemment revient en fait à démontrer que les solutions se trouvent dans cette région, mais la théorie exacte de FLOQUET concernant les équations à coefficients variables, montre que dans la région (D) il y a des zones d'instabilité comme il existe extérieurement à (D) des zones de stabilité.

Vu la difficulté de l'étude du cas général, nous allons nous contenter d'un cas particulier:

b) Application au cas particulier $n=1$ ($N=2$)

Nous avons dans ce cas :

$$(A_0) = \frac{1}{\pi} \left[\theta_0^* + \frac{1}{4} (\pi - \theta_0^*) \right] = \frac{3\theta_0^* + \pi}{4\pi}$$

$$(A_1) = \frac{1}{\pi} \left[\sin 2\theta_0^* - \frac{1}{4} \sin 2\theta_0^* \right] = \frac{3\sin 2\theta_0^*}{4\pi}$$

$$(B_1) = \frac{1}{\pi} \left[\cos 2\theta_0^* + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta_0^*) \right] = \frac{1 + 3\cos 2\theta_0^*}{4\pi}$$

$$\delta_1^1 = \frac{3\theta_0^* + \pi}{4\pi\omega^2} \quad (\text{l'indice 1 correspond à } n=1)$$

$$2\delta_1 = \frac{1}{4\pi\omega^2} \sqrt{10 + 6\cos 2\theta_0^*} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 \theta_0^*}}{2\pi\omega^2}$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1^1} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 \theta_0^*}}{3\theta_0^* + \pi}$$

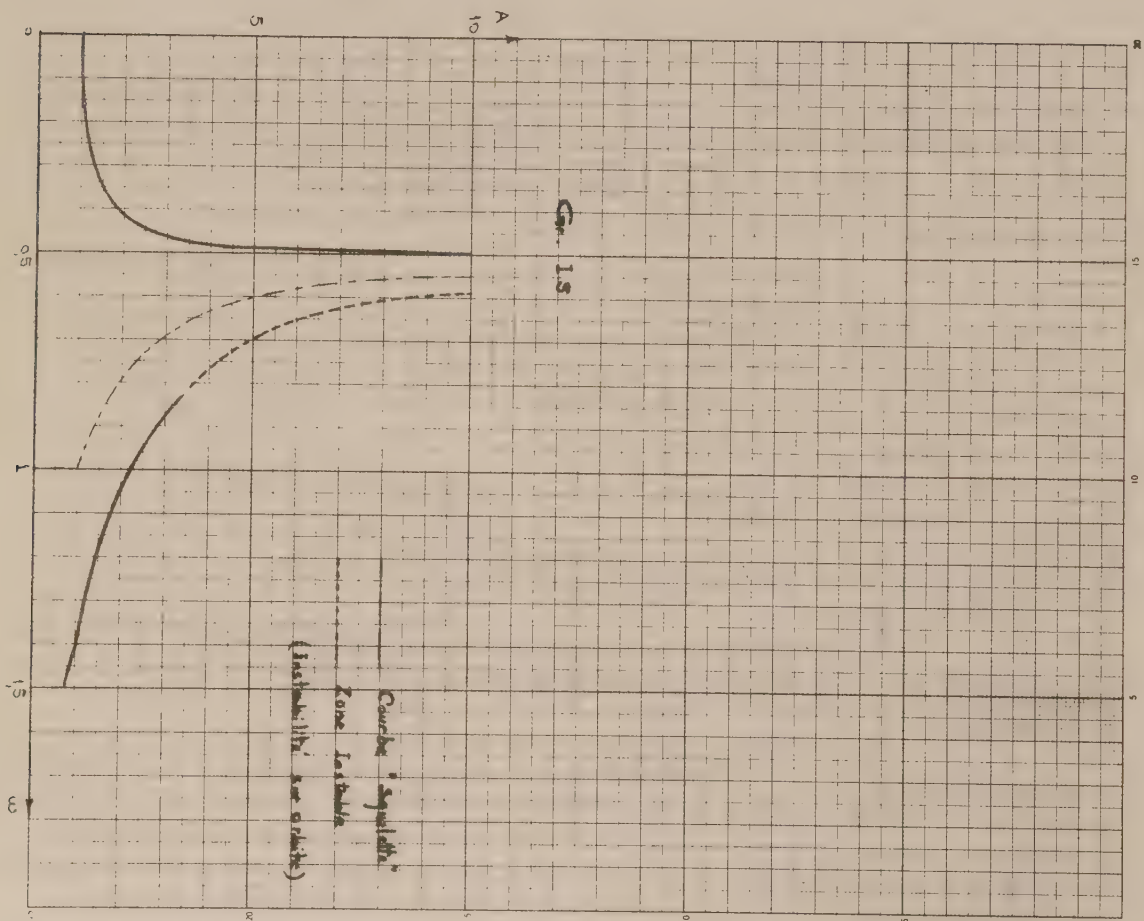
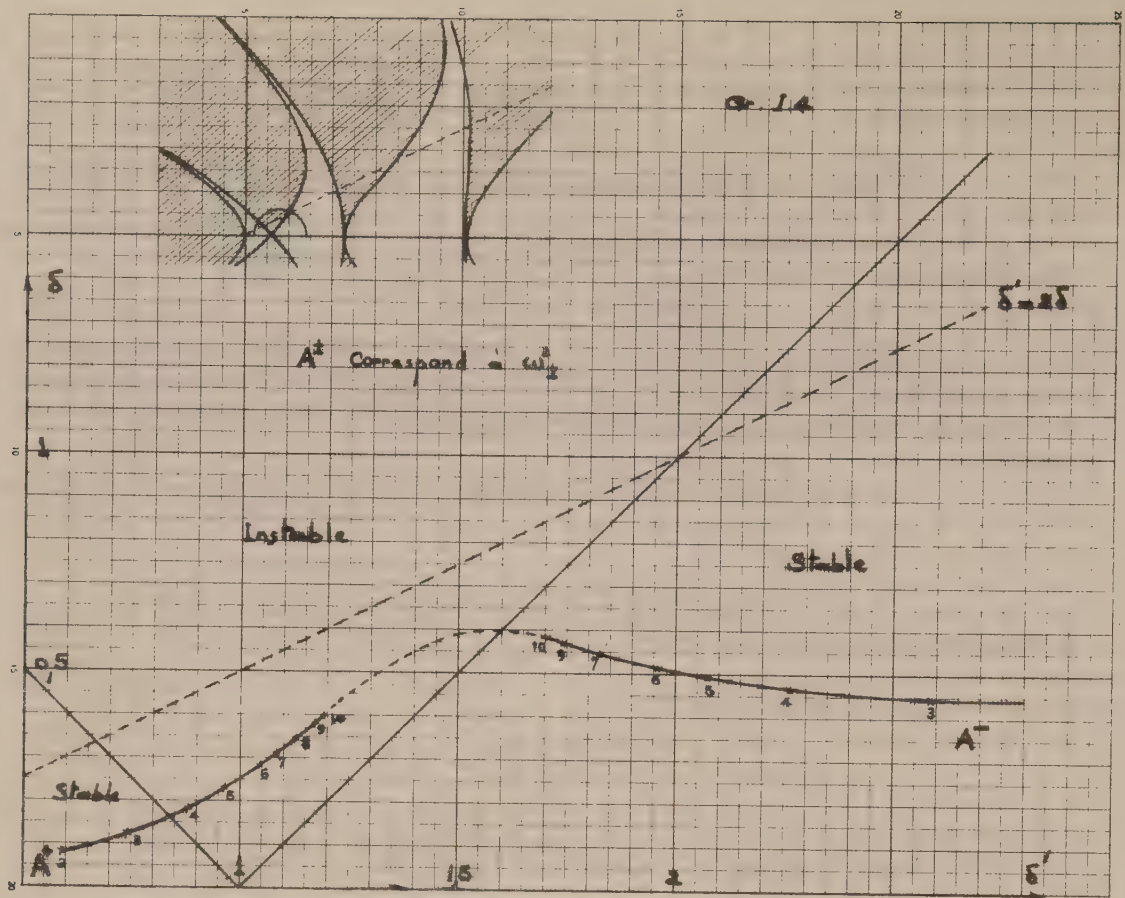
$$\omega_{\pm}^2 = \frac{C}{A} \pm \left[\left(\frac{E}{A} \right)^2 - \left(\frac{S}{A} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$S = -\frac{3aA}{4\pi} \sin^2 \theta_0^*$$

$$C = \frac{aA}{4} + \frac{3aA}{4\pi} \left(\theta_0^* - \frac{\sin 2\theta_0^*}{2} \right) \quad \text{ici } a=1$$

En considérant $E=1$ par exemple, nous pouvons tracer dans le plan (δ^1, δ) la courbe représentative et de la situer par rapport aux régions de stabilité et d'instabilité des équations de MATHIEU (Graphique 1.4)

Nous constatons qu'il y a une région instable représentée sur la courbe de résonance par la partie pointillée (Gr. 1.5). L'existence de cette région instable est confirmée par l'expérience. En effet, un léger décalage est constaté entre les courbes de résonance tracées pour des fréquences croissantes et pour des fréquences décroissantes et ce décalage correspond exactement à la partie pointillée. Le décalage étant faible, l'instabilité ne correspond pas à des amplitudes très grandes, mais nous pouvons l'expliquer en disant qu'elle est due à un brusque changement de la vitesse du mouvement.



ANNEXES

1) Possibilité d'avoir une solution exacte -

Dans le cas général d'un cycle multilinéaire quelconque $AA_0 \dots A_i \dots A_m BB_0 \dots B_i \dots B_m A$, nous pouvons avoir la solution exacte en considérant qu'il s'agit d'un ressort de raideur a suivant le segment AA_0 (entre les instants $t=0$ et $t=\alpha_0 T$), a_0 suivant le segment $A_0 A_1$ (entre $t=\alpha_0 T$ et $t=\alpha_1 T$) et ainsi de suite $\dots$, a_m suivant $A_m B$ (entre $t=\alpha_m T$ et $\frac{T}{2}$).

Le principe de cette méthode de calcul de la solution exacte a été élaboré par Monsieur le Professeur PIRONNEAU.

Les expressions obtenues par cette méthode ne sont pas faciles à manipuler dans leurs formes générales et deviennent vite extrêmement compliquées, mais la méthode a l'avantage d'être facilement adaptable au Calcul Automatique. Nous allons désormais appliquer cette méthode au cas où $n = \infty$.

Cas particulier où $n = \infty$

Si, pour n très grand, le cycle est celui représenté par la fig. 1.7, nous pourrions chercher la solution exacte en considérant qu'il s'agit d'un ressort de raideur K suivant le segment AB (entre les instants $t=\alpha T$ et $t=\frac{T}{2}$).

Conditions limites relatives à un cycle :

Au point A :

$$t=0 \quad y=A \quad \dot{y}=0$$

Au point B :

$$t=\alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\omega} \quad y=A - \frac{2R}{k}$$

Au point C :

$$t=\frac{T}{2} \quad y=-A \quad \dot{y}=0$$

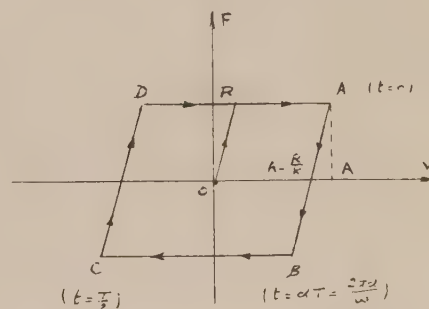


fig. 1.16

Mise en équation et solution suivant AB :

(Pour une question de commodité, les notations dans ce paragraphe ne sont pas nécessairement les mêmes que celles utilisées ultérieurement)

Nous avons :

$$m \ddot{y} = -k \left(y - A + \frac{R}{k} \right) + E_1 \cos (\omega t + \varphi)$$

ou bien :

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 \left(y - A + \frac{R}{k} \right) + E \cos (\omega t + \varphi) \quad (1.78)$$

dont la solution peut s'écrire directement :

$$\left(y - A + \frac{R}{k} \right) = A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos (\omega t + \varphi) \quad (1.79)$$

Les conditions au point A nous donnent :

$$A_1 = \frac{R}{k} - \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \varphi \quad (1.80)$$

$$B_1 = \frac{E \omega}{\omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \varphi \quad (1.81)$$

Si nous désignons par y_1 la valeur de y suivant AB, nous pourrions écrire :

$$y_1 = \left[\frac{R}{k} - \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \varphi \right] \cos \omega_0 t + \frac{E \omega}{\omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \varphi \sin \omega_0 t + \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos (\omega t + \varphi) + A - \frac{R}{k} \quad (1.82)$$

Nous avons trois inconnues :

$$\varphi, \quad \alpha \text{ et } A \text{ (ou } E \text{)}$$

Les trois équations nécessaires sont obtenues en écrivant :

$$y_{1B} = A - \frac{2R}{k} \quad y_{2C} = -A \quad \dot{y}_{1B} = \dot{y}_{2B}$$

y_2 étant la valeur de y suivant BC .

Mise en équation suivant BC :

Suivant BC, la force est constante et est égale à $-R$: d'où l'équation du mouvement :

$$m \ddot{y} = -R + E_1 \cos (\omega t + \varphi)$$

ou encore :

$$\ddot{y} = -\frac{R}{m} + E \cos (\omega t + \varphi) \quad (1.83)$$

Comme il n'y a pas de termes en y , nous pouvons intégrer directement :

$$\dot{y} - \dot{y}_B = -\frac{R}{m} (t - \alpha T) + \frac{E}{\omega} [\sin(\omega t + \varphi) - \sin(2\pi\alpha + \varphi)] \quad (1.84)$$

Nous pouvons calculer $\dot{y}_B$ en exprimant que $\dot{y}_C = \dot{y}(\frac{T}{2}) = 0$

$$\dot{y}_B = \frac{R}{m} (\frac{1}{2} - \alpha) T + \frac{E}{\omega} [\sin \varphi + \sin(2\pi\alpha + \varphi)] \quad (1.85)$$

Intégrons l'équation (1.84) :

$$(y - A + \frac{2R}{k}) - \dot{y}_B (t - \alpha T) = -\frac{R}{2m} (t^2 - \alpha^2 T^2) + \frac{R}{m} \alpha T (t - \alpha T) - \frac{E}{\omega} (t - \alpha T) \sin(2\pi\alpha + \varphi) - \frac{E}{\omega^2} [\cos(\omega t + \varphi) - \cos(2\pi\alpha + \varphi)]$$

Remplaçons y par y_2 et $\dot{y}_B$ par son expression (1.85) :

$$y_2 = A - \frac{2R}{k} + \frac{R}{2m} (T - \alpha T)(T - \alpha T - t) + (t - \alpha T) \frac{E}{\omega} \sin \varphi - \frac{E}{\omega^2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{E}{\omega^2} \cos(2\pi\alpha + \varphi) \quad (1.86)$$

Nous allons essayer maintenant de calculer les trois inconnues φ , α et A (ou E) en exprimant les trois conditions citées ci-dessus :

1^{ère} condition :

$$y_{1B} = A - \frac{2R}{k} = y_1(\alpha T)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{R}{k} (1 + \cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}) + E \left(\frac{\cos 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \cos \varphi + E \left[\frac{\omega \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \sin \varphi = 0 \quad (1.87)$$

ou encore

$$b_{11} + E b_{13} \cos \varphi + E b_{14} \sin \varphi = 0 \quad (1.88 a)$$

avec

$$b_{11} = \frac{R}{k} (1 + \cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega})$$

$$b_{13} = \frac{\cos 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.88 b)$$

$$b_{14} = \frac{\omega \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

2^{ème} condition :

$$y_{2C} = y_2(\frac{T}{2}) = -A$$

d'où l'équation suivante :

$$R \left[\frac{T^2}{2m} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^2 - \frac{2}{k} \right] + 2A + \frac{E}{\omega^2} (1 + \cos 2\pi\alpha) \cos \varphi + \frac{E}{\omega} \left[T \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega} \right] \sin \varphi = 0 \quad (1.89)$$

que nous pouvons encore écrire :

$$b_{21} + b_{22}A + E b_{23} \cos \varphi + E b_{24} \sin \varphi = 0 \quad (1.90a)$$

avec :

$$b_{21} = R \left[\frac{T^2}{2m} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^2 - \frac{2}{k} \right]$$

$$b_{22} = 2$$

$$b_{23} = \frac{1 + \cos 2\pi\alpha}{\omega^2} \quad (1.90 b)$$

$$b_{24} = \frac{1}{\omega} \left[T \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega} \right]$$

3ème condition :

$$\dot{y}_{1B} = \dot{y}_{2B} \quad \text{ou} \quad \dot{y}_1(\alpha T) = \dot{y}_2(\alpha T)$$

ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left[-\frac{R}{m} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) T - \frac{R}{k} \omega_0 \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega} \right] + E \left[\frac{\omega_0 \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega} - \frac{\omega \sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \cos \varphi \\ + E \left[\frac{\omega \cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\omega \sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\cos 2\pi\alpha}{\omega} - \frac{1}{\omega} \right] \sin \varphi = 0 \quad (1.91) \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire :

$$b_{31} + E b_{33} \cos \varphi + E b_{34} \sin \varphi = 0 \quad (1.92 a)$$

avec :

$$b_{31} = -\frac{R}{m} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) T - \frac{R}{k} \omega_0 \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$b_{33} = \frac{\omega_0 \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega} - \frac{\omega \sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.92 b)$$

$$b_{34} = \frac{\omega \cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\omega \sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\cos 2\pi\alpha}{\omega} - \frac{1}{\omega}$$

On a donc trois équations à trois inconnues α, φ et A :

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{12}A + E (b_{13} \cos \varphi + b_{14} \sin \varphi) &= 0 \\ b_{21} + b_{22}A + E (b_{23} \cos \varphi + b_{24} \sin \varphi) &= 0 \\ b_{31} + b_{32}A + E (b_{33} \cos \varphi + b_{34} \sin \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.93)$$

avec $b_{12} = b_{32} = 0$ et $b_{22} = 2$

Nous pouvons tirer φ et A en fonction de α : $\varphi(\alpha)$ et $A(\alpha)$. Nous allons commencer par calculer $\tan \varphi$ en fonction de α . Si $\varphi(\alpha)$ est connue, le calcul de $A(\alpha)$ ne présente pas de difficulté.

Le système (1.93) est un système de Cramer; donc pour qu'il y ait compatibilité entre les trois équations, il faut que le déterminant caractéristique soit nul, ce qui revient à écrire :

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \cos \varphi + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} \sin \varphi = 0 \quad (1.94)$$

ou encore : $-N \cos \varphi + D \sin \varphi = 0 \quad (1.95a)$

avec :

$$-N = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ b_{21} & 2 & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{vmatrix} = 2(b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31}) \quad (1.95b)$$

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 2 & b_{24} \\ b_{31} & 0 & b_{34} \end{vmatrix} = 2(b_{11}b_{34} - b_{14}b_{31}) \quad (1.95c)$$

d'où

$$\tan \varphi = \frac{N}{D} = \frac{b_{13}b_{31} - b_{11}b_{33}}{b_{11}b_{34} - b_{14}b_{31}} \quad (1.96)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_{13}b_{31} - b_{11}b_{33} = - \left[\frac{R}{k} \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) T - \frac{R}{k} \omega_0 \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega} \right] & \left(\frac{\cos 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \\ - \frac{R}{k} (1 + \cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}) & \left(\frac{\omega_0 \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega} - \frac{\omega \sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \end{aligned}$$

$$b_{11}b_{34} - b_{14}b_{31} = \frac{R}{k} \left(1 + \cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left(\frac{\omega \cos 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\omega \sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\cos 2\pi\alpha}{\omega} - \frac{1}{\omega} \right) \\ + \frac{R}{k} \left[\omega_0^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) T + \omega \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega} \right] \left(\frac{\omega \sin 2\pi\alpha \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega_0^2 - \omega^2} - \frac{\sin 2\pi\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Les courbes $\varphi(\alpha)$, $E(\alpha)$ et $A(\alpha)$ sont toutes monotones et décroissantes en fonction de α , si elles sont tracées pour une valeur donnée de ω . Donc, à une valeur de φ , E et A , correspond une seule valeur de α et réciproquement.

Nous pouvons remarquer toutefois que :

pour $\alpha = \frac{1}{2}$ (il n'y a pas de glissement) nous avons $\text{tg } \varphi = 0$ et $\varphi = 0$

pour $\alpha = 0$ (on a toujours glissement), nous avons $\text{tg } \varphi = 0$ et $\varphi = \pi$

A partir du faisceau de courbes ainsi obtenu, nous pourrions en déduire les courbes suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} y = f_1(\omega) \\ \varphi = f_2(\omega) \end{array} \right\} \text{ à } E \text{ constante}$$

où

$$f_1(\omega) = \begin{cases} y_1(\omega) & \text{pour } y < d = \frac{R}{k} \\ y_2(\omega) & \text{pour } y > d = \frac{R}{k} \end{cases}$$

2) Influence d'un amortissement visqueux :

La présence d'un amortissement visqueux de constante β se traduit par la modification de l'équation (1.32) qui devient :

$$-\beta \omega A_0 + S(A_0) = E \sin \varphi_0$$

Donc tout revient à remplacer $S(A_0)$ par $\overline{S(A_0)} = S(A_0) - \beta \omega A_0$; l'aire du cycle augmente et l'équation de la courbe de résonance devient :

$$\omega^2 = \frac{C(A)}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{A}\right)^2 - \left[\frac{\overline{S(A)}}{A}\right]^2}$$

B - ETUDE EXPERIMENTALE

Nous avons fait l'étude des trois systèmes suivants :

- système à deux lames identiques ($n=1$) de section $80 \times 10\text{mm}^2$ chacune ,
- système à quatre lames identiques ($n=2$) de section $80 \times 5\text{mm}^2$ chacune .

La longueur libre des lames dans les deux cas précédents est $L = 825\text{mm}$,

- système à dix lames identiques ($n=5$) de section $80 \times 2\text{mm}^2$ chacune et de longueur libre $L = 450\text{mm}$

Donc, dans les trois cas, nous avons $H = 10\text{mm}$.

Les lames, en duralumin, sont encastrées à une extrémité sur un bâti fixe, l'encastrement ne permettant pas des déplacements verticaux, l'action de la pesanteur est négligée .

Les lames sont maintenues en contact par l'action de ressorts identiques répartis de chaque côté en double rangée . Le nombre de ces ressorts est 64 dans les cas ($n=1$) et ($n=2$) et de 36 dans le cas où ($n=5$) . La pression entre les lames est réglable par action sur la tension des ressorts ayant chacun une raideur moyenne de 370 kg/mm . Comme la vis de serrage a un diamètre de 3mm et un pas de $0,60\text{mm}$, un tour de l'écrou correspond donc à une pression de $0,5/0,9 \text{ kg}$. Nous pouvons admettre que le serrage d'un tour de l'écrou de chacun des deux ressorts en face, correspond à une pression voisine d'un kg . Ainsi, le serrage d'un tour de tous les ressorts correspond à une valeur

$$p = \frac{64}{2S} \text{ dans les cas } (n=1) \text{ et } (n=2) \text{ et à une valeur } p = \frac{36}{2S'} \text{ dans le cas où } n=5 , \text{ avec } S=660\text{cm}^2$$

$$\text{et } S' = 360 \text{ cm}^2$$

Vu le nombre des ressorts, nous admettons que la pression est uniformément répartie tout le long de la poutre .

Une masse $M = 5,282 \text{ kg}$ est fixée à l'extrémité libre; cette masse, en bronze, est insensible à l'action du champ magnétique des excitateurs .

Des papiers « calques » sont intercalés entre les lames et tout le long de l'interface .

Deux excitateurs PRODERA type 20 Je 40 alimentés en série et en opposition de phase, ont leurs bobines fixées sur la masse en bronze, une de chaque côté . L'ensemble des deux excitateurs développe une force voisine de $350\text{g}/100\text{mA}$. L'étalonnage des bobines excitatrices a été réalisé à l'aide d'une jauge de contrainte collée sur une lame flexible auxiliaire et d'un pont extensométrique AOIP .

Un capteur déplacement PHILIPS est fixé à une distance de 80mm à partir de l'encastrement . En essais statiques, ce capteur est relié à un pont PHILIPS qui donne directement la valeur de la flèche en microns; en essais dynamiques, il est relié à un millivoltmètre PHILIPS à travers le même pont .

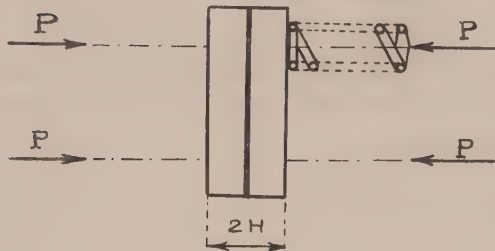
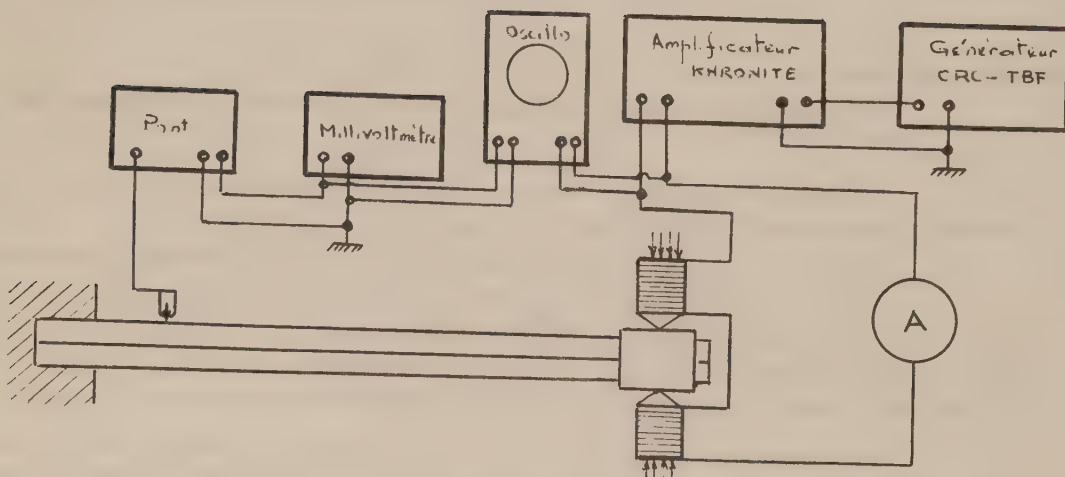
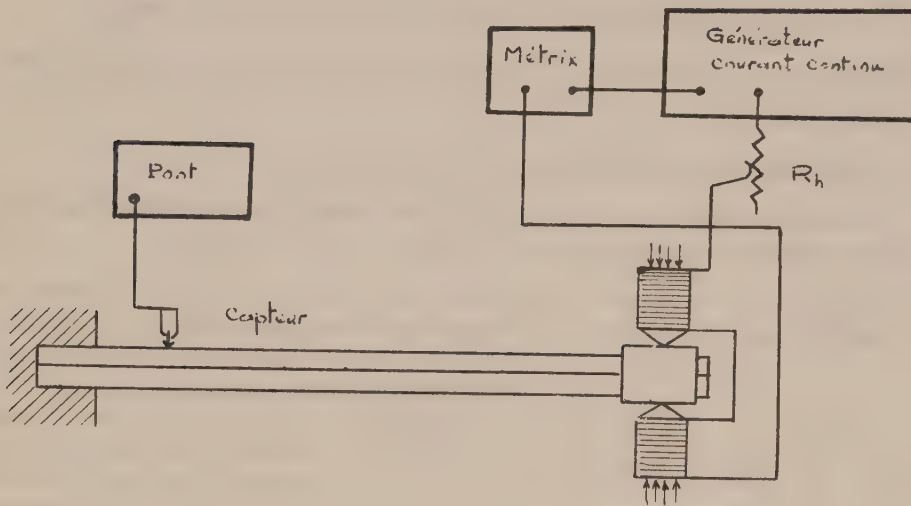


fig. 1.17

Les excitateurs sont alimentés directement à travers un rhéostat par un générateur de courant continu PHILIPS en essais statiques et par un générateur CRC-TBF à travers un amplificateur de puissance KHRONITE en essais dynamiques .

Dans l'étude expérimentale, une vérification quantitative concernant l'énergie dissipée, les forces au début du glissement en fonction de la pression de serrage, et les valeurs des flèches correspondantes, a été faite . Cette vérification peut être considérée comme satisfaisante bien que les écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales ne sont pas toujours négligeables, vu la précision médiocre de la valeur du coefficient de frottement μ , et vu la présence de nombreux phénomènes mal connus : amortissement visqueux, variation de μ en fonction de la vitesse, état imparfait des surfaces en contact ...



I - Système à deux lames :

1°) Essais statiques :

Les cycles d'hystérésis tracés pour différentes valeurs de la pression de serrage ont bien l'allure décrite au début de ce chapitre. Le rapport des pentes avant et après glissement est de 3,3 presque dans tous les cas au lieu de la valeur théorique qui est 4. Ceci peut s'expliquer par le fait que le glissement n'est pas total d'une part et que l'inertie des ressorts et des vis n'est pas négligeable, d'autre part.

a) Calcul de μ :

La valeur du coefficient de frottement de COULOMB μ peut être déterminée à partir de l'expression de l'énergie dissipée par cycle. Cette expression s'écrit, en effet :

$$D = \frac{8}{3E} \mu p b L^3 \left[\frac{3F}{bh^2} - \frac{4\mu p}{h} \right]$$

La mesure de la flèche à l'extrémité libre avant glissement nous permet d'avoir la valeur de E (module d'Young). Nous obtenons ainsi :

$$E \simeq 7750 \pm 380 \text{ kg/mm}^2 \quad (\text{à } 5\% \text{ près})$$

Si nous désignons par N le nombre de tours de l'écrou de serrage de chaque côté, nous pouvons écrire :

$$p = \frac{N}{0,9} \cdot \frac{32000}{80 \times 825} \text{ en kg/mm}^2$$

Nous pouvons calculer μ en considérant le cycle tracé pour $N=3$ tours; l'aire de ce cycle correspond à une énergie dissipée égale à 610 g.cm (Graphique 1.6). Le courant maximal débité dans les excitateurs étant de 800 mA, il correspond à une force :

$$F = 8 \times 350 \text{ g}$$

Tout calcul fait, nous arrivons à :

$$\mu = 0,320 \pm 0,024$$

Le frottement entre les deux lames est important; la précision du calcul est médiocre; le terme prédominant de l'erreur résulte du procédé de serrage. Ce terme peut être diminué en considérant une valeur plus grande de N , mais une autre source d'erreur intervient alors du fait qu'à la suite d'une irrégularité de serrage éventuelle, le glissement n'est que partiel.

b) Energie dissipée :

En adaptant la valeur de μ trouvée précédemment (erreur systématique de 7,5 %), nous pouvons comparer les valeurs théoriques et expérimentales de l'énergie dissipée par cycle. Cette comparaison nous permet de nous rendre compte de la validité de la valeur de μ calculée.

Nous pouvons remarquer d'abord :

$$|\Delta D|_{\text{expérimentale}} \leq 15 \text{ g.cm} \text{ correspondant à une erreur de mesure de la surface d'un cycle. Cette erreur est } \sim 1 \text{ cm}^2$$

$$\left| \frac{\Delta D}{D_{\text{th}}} \right| \simeq \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta \mu}{\mu} + (0)$$

Pour quatre valeurs différentes de la pression de serrage, nous pouvons dresser le tableau suivant :

N	D théorique g.cm	D expérimentale g.cm	$\frac{D_{EX}}{D_{th}}$	Ecart brut %
2	442 ± 88	476 ± 15	1,08	8
3	610 ± 103	610 ± 15	1,00	0
4	745 ± 120	660 ± 15	0,89	11
5	845 ± 127	767 ± 15	0,91	9

A remarquer que le déplacement indiqué par le capteur doit être multiplié par le rapport de la flèche à l'extrémité libre, à la flèche au point d'application du capteur . Ce rapport est de l'ordre de 86 .

c) Force au début du glissement :

Les valeurs expérimentales de G_O sont approchées . Les cycles tracés ne présentant pas de points anguleux, nous pouvons considérer le début de la partie courbe comme correspondant au début du glissement (graphique 1.6) .

Nous pouvons comparer les valeurs de G_O déterminées expérimentalement et calculées à partir de l'expression :

$$G_O = \frac{4}{3} \mu p b h$$

avec

$$\left| \frac{\Delta G_{O(\text{théorique})}}{G_O} \right| \simeq \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta \mu}{\mu} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta \mu}{\mu}$$

$$\Delta N = \frac{1}{6} \text{ tour}$$

La valeur expérimentale de G_O est lue avec une erreur de 2mm due à l'imprécision dans la détermination du début de la partie courbe; cette erreur de 2mm en ordonnées correspond à

$$\Delta G_{Oexp} = \pm 70g$$

d'où le tableau suivant :

N	G_O théorique g .	G_O expérimentale g.	$\frac{G_{Oexp}}{G_{Oth}}$	Ecart brut %
2	380 ± 57	420 ± 70	1,10	10
3	570 ± 68	595 ± 70	1,04	4
4	760 ± 84	785 ± 70	1,03	3
5	950 ± 95	960 ± 70	1,02	2

2 - Essais dynamiques

Les courbes de résonance tracées pour différentes valeurs de la pression de serrage nous montrent que l'allure prévue par la théorie est respectée (graphiques 1.7, 8, 9 et 10). Nous avons laissé ces courbes en coordonnées expérimentales car l'utilisation des coordonnées réduites diminue les amplitudes relatives. Vu le type du capteur utilisé, le rapport $\frac{A}{d_0}$ dépasse rarement la valeur 2; l'emploi d'un autre type de capteur (CIMATRAN, par exemple) est moins précis. Nous avons estimé que la vérification de l'allure générale des courbes est suffisante car, en pratique, il est très difficile d'obtenir exactement la courbe de résonance prévue par la théorie, étant donné les nombreux phénomènes parasites qui se présentent : frottements de différentes sortes, couplages, etc ...

Sur les courbes de résonance ainsi tracées, aucun saut (identique à celui de la résonance de DUFFING) ne se présente, ce qui est conforme à l'étude de la stabilité faite précédemment. Par contre, un léger décalage est signalé au delà de la fréquence de résonance, suivant que le balayage se fait en fréquences croissantes ou en fréquences décroissantes, conformément à l'étude de la stabilité par l'équation de MATHIEU. Ce décalage est très faible, mais nous avons vérifié son existence dans la majorité des essais, bien qu'il ne soit pas toujours représenté sur les courbes de résonance.

Sur ces courbes de résonance, nous pouvons aussi remarquer, dans la plupart des cas, la fin du glissement. Théoriquement, la fin (ou le début) du phénomène de glissement doit avoir lieu toujours pour la même amplitude, ce qui, en pratique, n'est pas le cas. En effet, l'étude expérimentale nous montre que le glissement se termine, à peu près, à la même fréquence et tout se passe comme si le coefficient de frottement de COULOMB variait avec l'amplitude (ou avec la vitesse $= \omega A$) au cours des essais dynamiques, ce qui confirme un résultat déjà connu, à savoir : le coefficient de frottement n'est constant qu'à des grandes vitesses et comme la fin du glissement se fait avec une vitesse relativement faible (après la résonance), on peut comprendre la raison de variation de μ .

Malgré ce phénomène, nous pouvons quand même comparer les valeurs des flèches correspondant à la fin du glissement, obtenues au cours des essais statiques et dynamiques, aux valeurs théoriques.

Pour avoir la flèche dynamique, nous avons considéré, pour un serrage donné, la valeur la plus faible lue sur l'ensemble des courbes de résonance. La valeur indiquée par la courbe doit être divisée par deux car, au cours d'un cycle, la masse se déplace de la même quantité de part et d'autre de la position d'équilibre.

Nous avons :

$$d_{0(\text{théorique})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu p L^3}{EH^2}$$

$$\left| \frac{\Delta d_{0(\text{th})}}{d_0} \right| \simeq \frac{\Delta \mu}{\mu} + \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta E}{E}$$

avec :

$$\frac{\Delta \mu}{\mu} = \frac{7,5}{100} \quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{6N} \quad (N = \text{nombre de tours de l'écrou de serrage})$$

$$\text{et} \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{5}{100}$$

Nous obtenons le tableau suivant :

N tours	d_o (Expérimentale) statique mm	d_o (Expérimentale) dynamique mm	d_o théorique mm	$\frac{d_o^{th}}{d_o^{Ex}} \geq$	Ecart brut %
2	$0,190 \pm 0,025$	$0,190 \pm 0,060$	$0,155 \pm 0,028$	0,82	18
3	$0,280 \pm 0,025$	$0,270 \pm 0,060$	$0,230 \pm 0,033$	0,83	17
4	$0,340 \pm 0,025$	$0,360 \pm 0,060$	$0,300 \pm 0,037$	0,86	14
5	$0,410 \pm 0,025$	$0,400 \pm 0,060$	$0,380 \pm 0,041$	0,94	6

II - Système à quatre lames :

1°) Essais statiques -

Le cycle d'hystérésis tracé présente, en général, deux changements de pente, faciles à remarquer, surtout dans les cas des faibles pressions de serrage. Le rapport de la dernière pente à la première varie entre 1/13 et 1/18 contre une valeur théorique égale à 1/16. La pente correspondant au glissement partiel n'est pas facile à connaître, étant donné la présence d'une partie courbe entre la zone du non glissement et celle du glissement total (graphique I.12)

a) Calcul de μ :

Comme nous l'avons fait dans le cas de deux lames, nous pouvons utiliser l'expression de l'énergie dissipée par cycle pendant le glissement total. Cette expression s'écrit :

$$D_1 = \frac{8}{3E} \mu p b L^3 \left\{ \left| \frac{3F}{bh^2} - \frac{\mu p}{h} \right| + \left| \frac{9\mu p}{2h} - \frac{3F}{2bh^2} \right| \right\}$$

ou bien, en fonction de N : nombre de tours de serrage :

$$D_1 = 0,76 \mu N (6300 - 204,26 \mu N)$$

Pour N = 3 tours, l'aire du cycle décrit par l'extrémité libre correspond à une énergie dissipée $D_1 = 1550 \text{ g.cm}$, ce qui nous donne pour μ la valeur suivante :

$$\mu = 0,112 \pm 0,008$$

Nous constatons donc que la valeur de μ diffère beaucoup de celle obtenue dans le cas des deux lames, ce qui correspond à l'énorme influence de l'état des surfaces .

b) Energie dissipée :

En adaptant la valeur précédente de μ (erreur systématique de l'ordre de 7,5%) nous pouvons calculer la valeur théorique de l'énergie dissipée et la comparer à la valeur expérimentale pour différentes valeurs de la pression de serrage. Cette comparaison nous informe en même temps sur la validité de la valeur de μ précédemment calculée .

N tours	D ₁ théorique g.cm	D ₁ Expérimentale g.cm	$\frac{D_1^{th}}{D_1^{Ex}}$	Ecart brut %
2	1035 ± 207	1110 ± 30	0,93	7
3	1550 ± 280	1550 ± 30	1	0
4	2085 ± 331	1900 ± 30	1,09	9
5	2570 ± 386	2180 ± 30	1,18	18

La différence relativement grande obtenue pour N = 5 tours peut être attribuée au fait que le glissement n'est pas total et l'expression précédente de D₁ n'est pas valable.

2°) Essais dynamiques

Les courbes de résonance présentent, en général, deux points anguleux correspondant, chacun, à la fin d'une phase de glissement. Nous remarquons, presque dans tous les cas, que $d_1 \sim 2 d_0$ conformément avec la théorie, bien que les points presque anguleux ne se produisent pas pour la même amplitude, ce qui est dû à une variation éventuelle de μ en essais dynamiques.

Pour comparer les valeurs expérimentales des flèches d_0 et d_1 avec les valeurs théoriques, nous pouvons considérer les premières courbes de résonance ayant chacune deux points anguleux et correspondant à l'excitation la plus faible (graphiques 1.13, 14, 15 et 16).

Nous avons :

$$d_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu p L^3}{EH^2} \quad \frac{\Delta d_0}{d_0} \simeq \frac{\Delta \mu}{\mu} + \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta E}{E}$$

$$d_1 = 2 d_0 \quad \frac{\Delta d_1}{d_1} = \frac{\Delta d_0}{d_0}$$

La valeur expérimentale est connue à 0,06 mm près :

N tours	d ₀ théorique mm	d ₁ théorique mm	d ₀ Expérimentale mm	d ₁ Expérimentale mm	$\frac{d_0^{th}}{d_0^{Ex}}$	$\frac{d_1^{th}}{d_1^{Ex}}$
2	0,055 ± 0,008	0,110 ± 0,016	0,076 ± 0,060	0,168 ± 0,060	0,73	0,66
3	0,081 ± 0,010	0,162 ± 0,020	0,112 ± 0,060	0,220 ± 0,060	0,73	0,74
4	0,110 ± 0,012	0,220 ± 0,024	0,144 ± 0,060	0,320 ± 0,060	0,76	0,69
5	0,133 ± 0,013	0,266 ± 0,026	0,160 ± 0,060	0,360 ± 0,060	0,83	0,74

L'écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques est très grand et peut dépasser 30 % ; ceci est dû surtout à l'imprécision dans la détermination des points anguleux et dans le calcul du coefficient de frottement μ .

Nous pouvons tracer les courbes « squelettes » en coordonnées réduites (fréquence avant glissement = 1 et flèche au début du glissement = 1) et comparer ces courbes à la courbe théorique

(graphique I. 11) . Pour $N = 2$ tours ($p \sim \frac{2\text{kg}}{5}$) , la courbe « squelette » n'est pas confondue avec la courbe théorique, ce qui était à prévoir étant donné que le rapport des pentes obtenues est de 3,3 au lieu de 4 .

III - Système à dix lames :

Les cycles tracés montrent qu'il est impossible d'avoir le glissement total avec les excitateurs utilisés . Le rapport des pentes varie entre 20 (pour $p=5\text{ kg}$) et 30 (pour $p=2\text{kg}$) (graphique I.17)

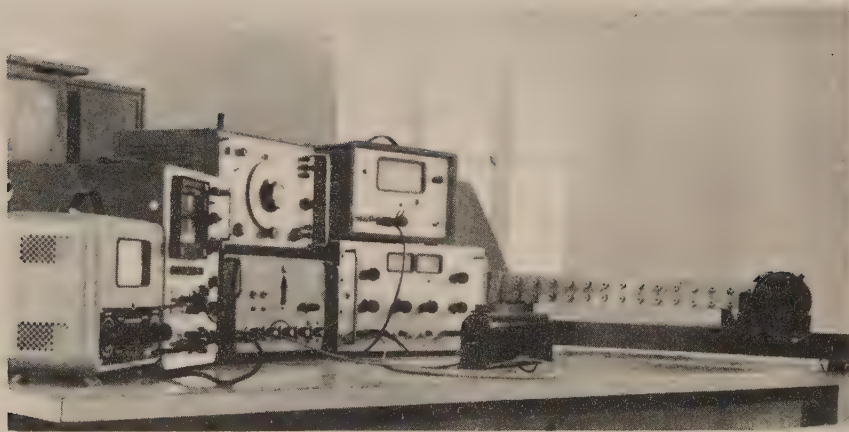
Pour cette raison , la valeur de μ est difficile à calculer avec une précision raisonnable.

Les courbes de résonance présentent plusieurs points anguleux, chaque point anguleux indique la fin d'une phase de glissement (graphiques I. 18,19,20 et 21) .

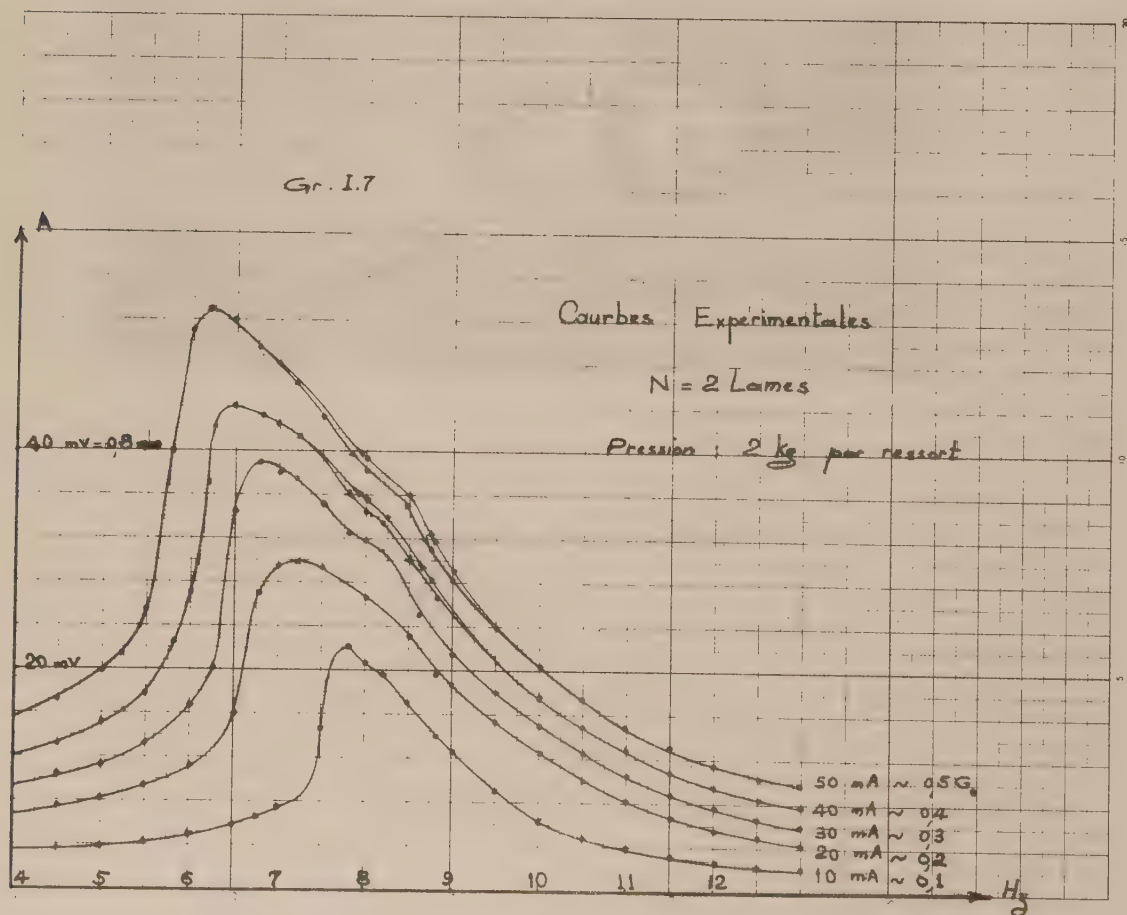
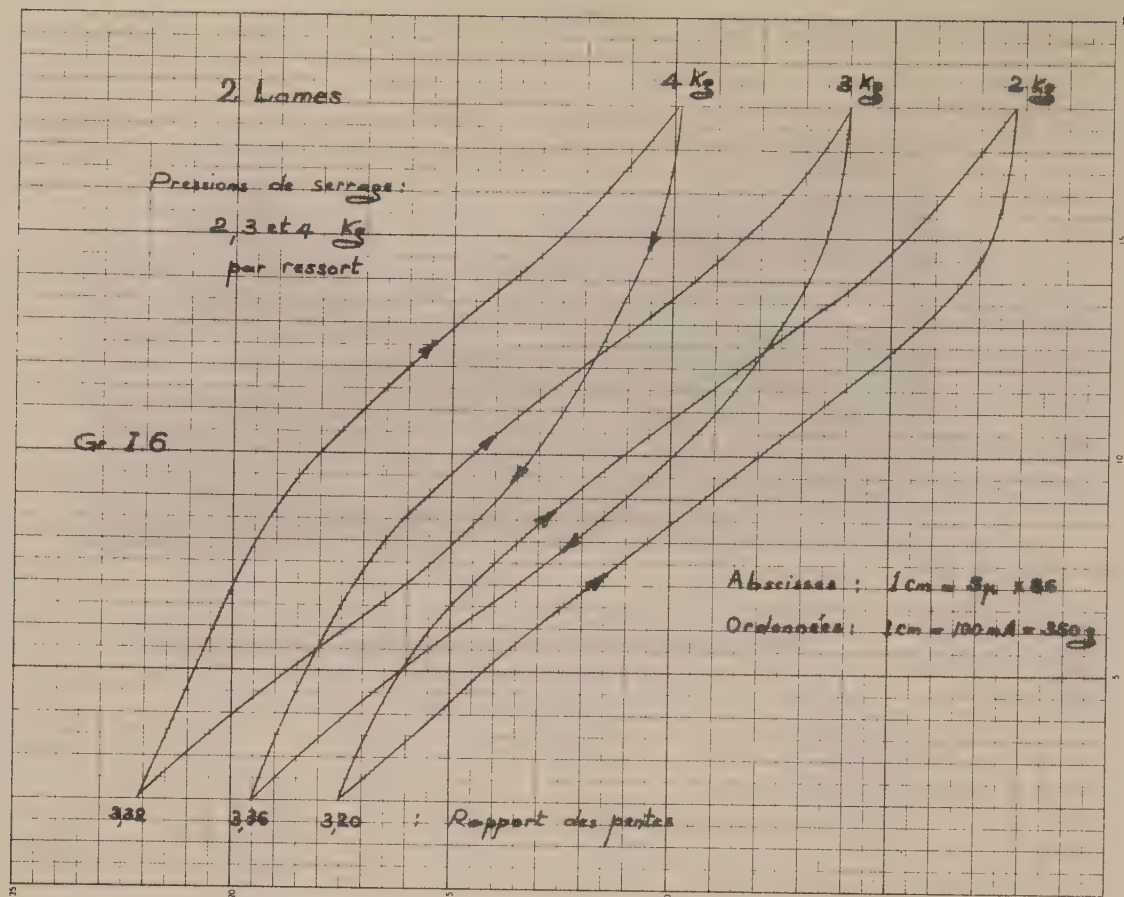
:
÷ ÷
:

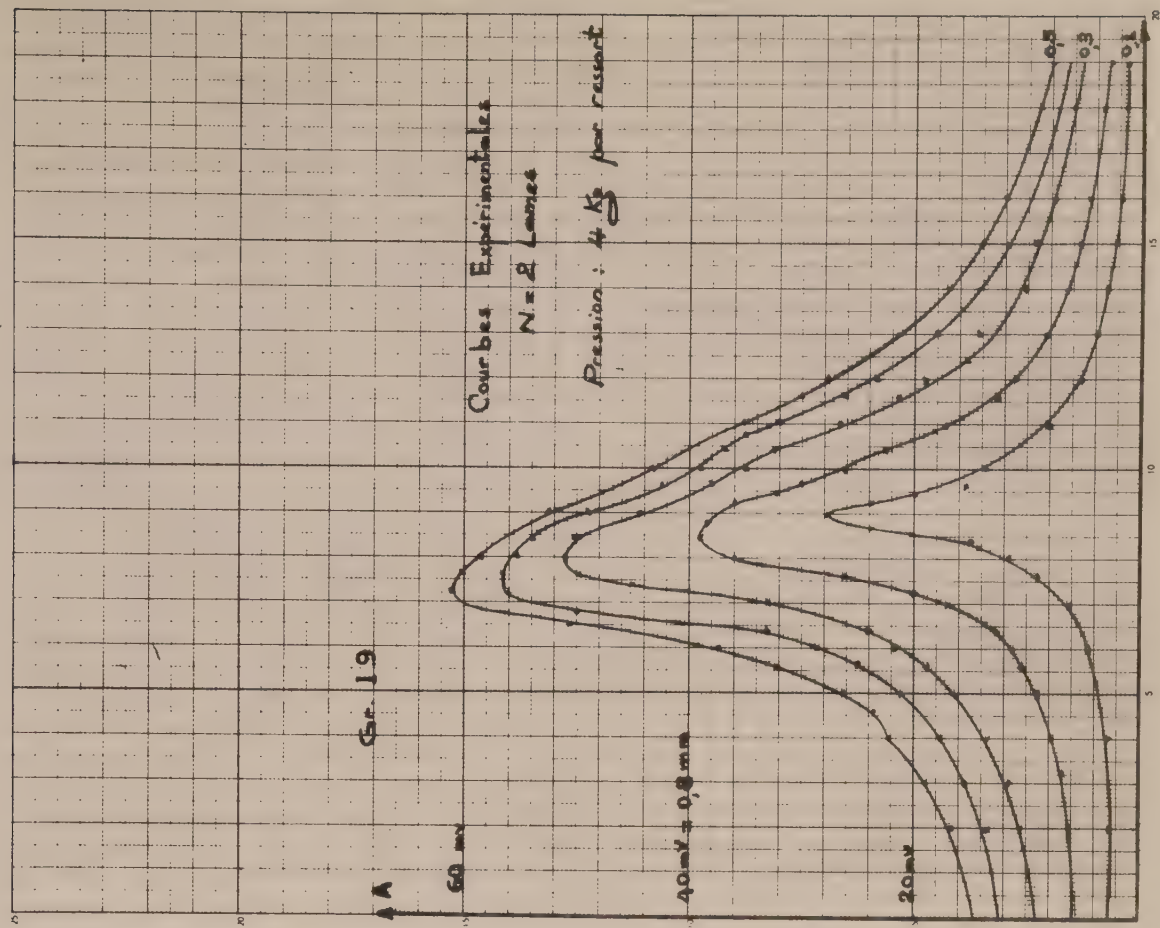
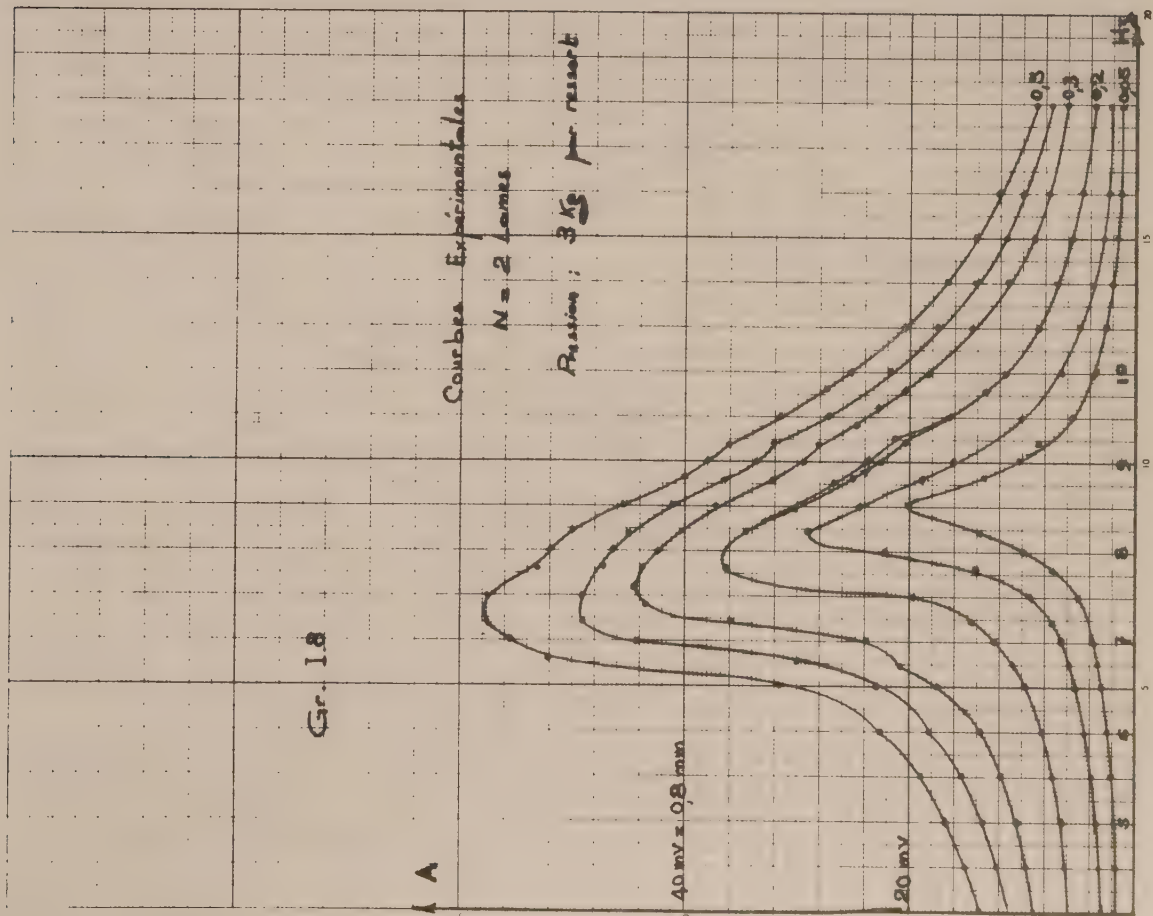


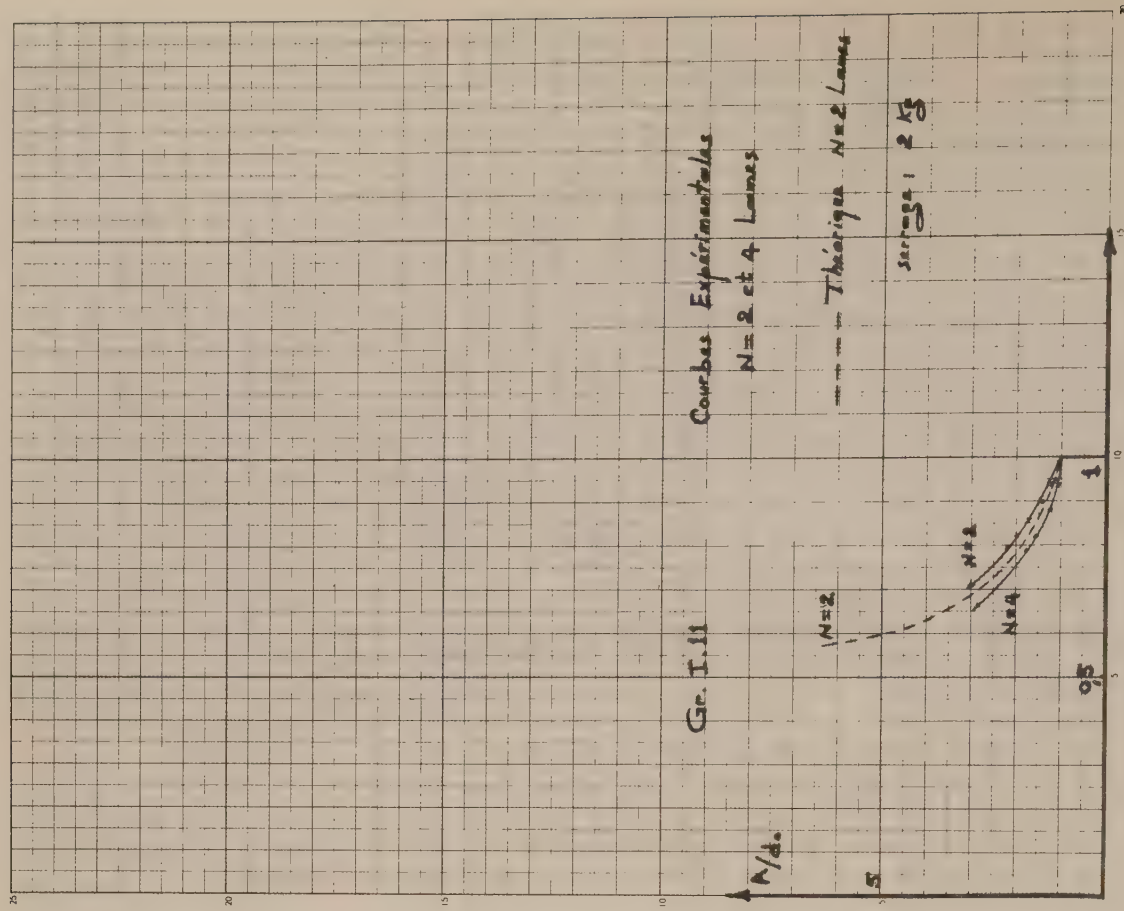
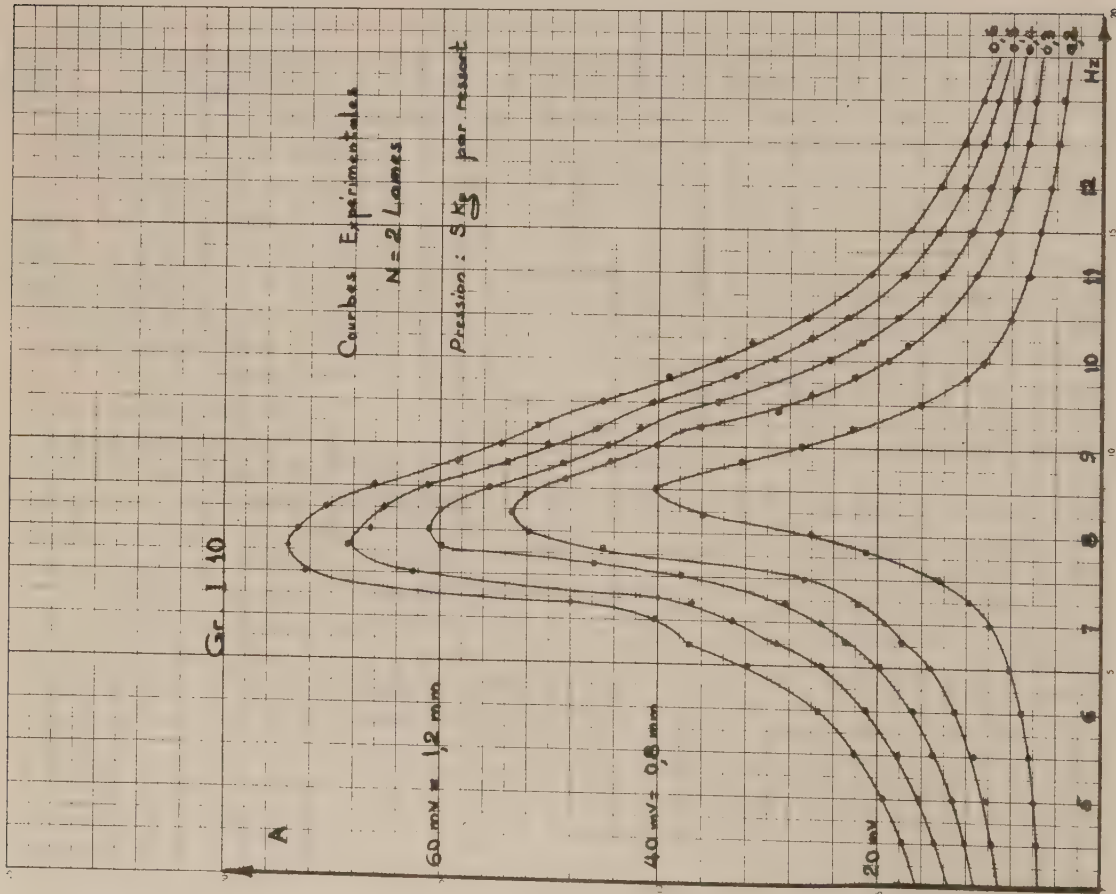
Montage à deux lames avec les 2 excitateurs, le capteur et les 64 ressorts de serrage .

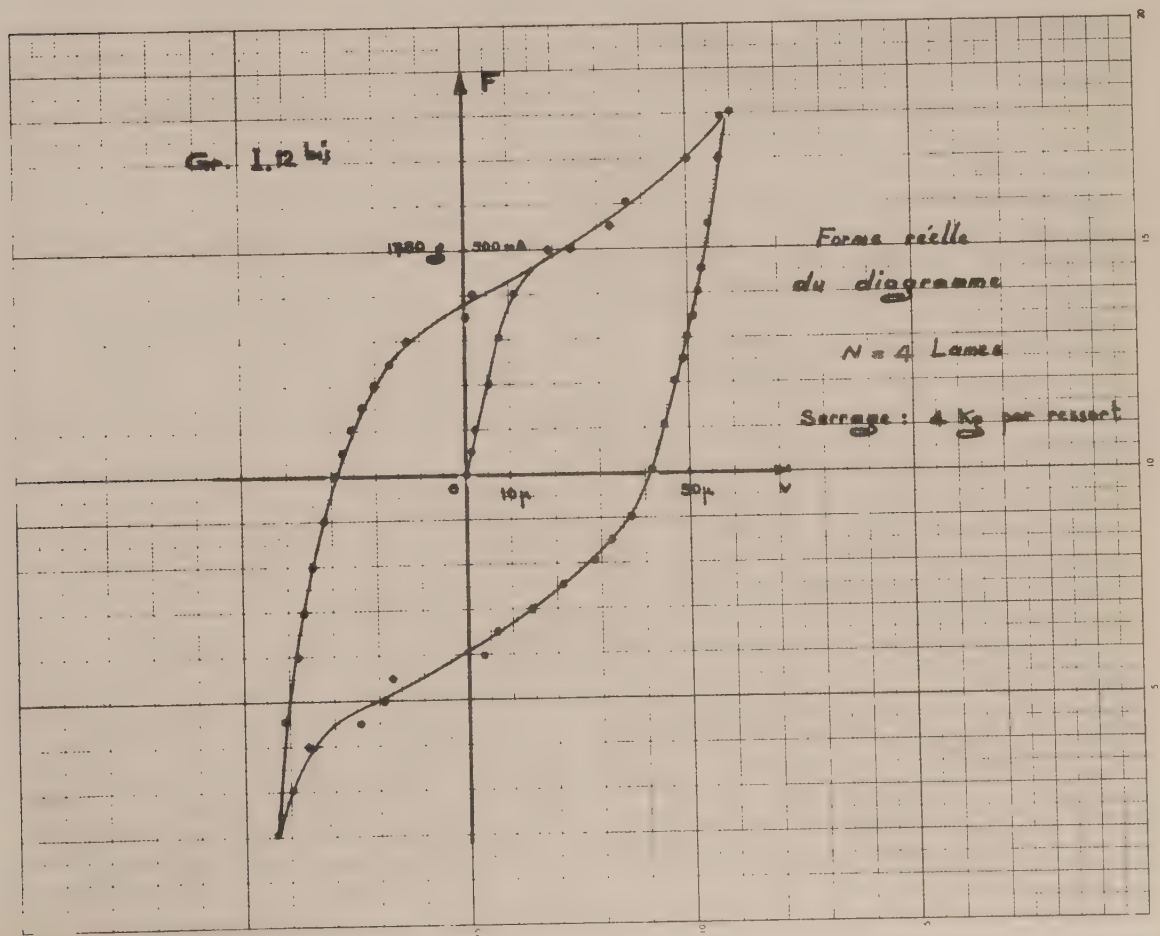
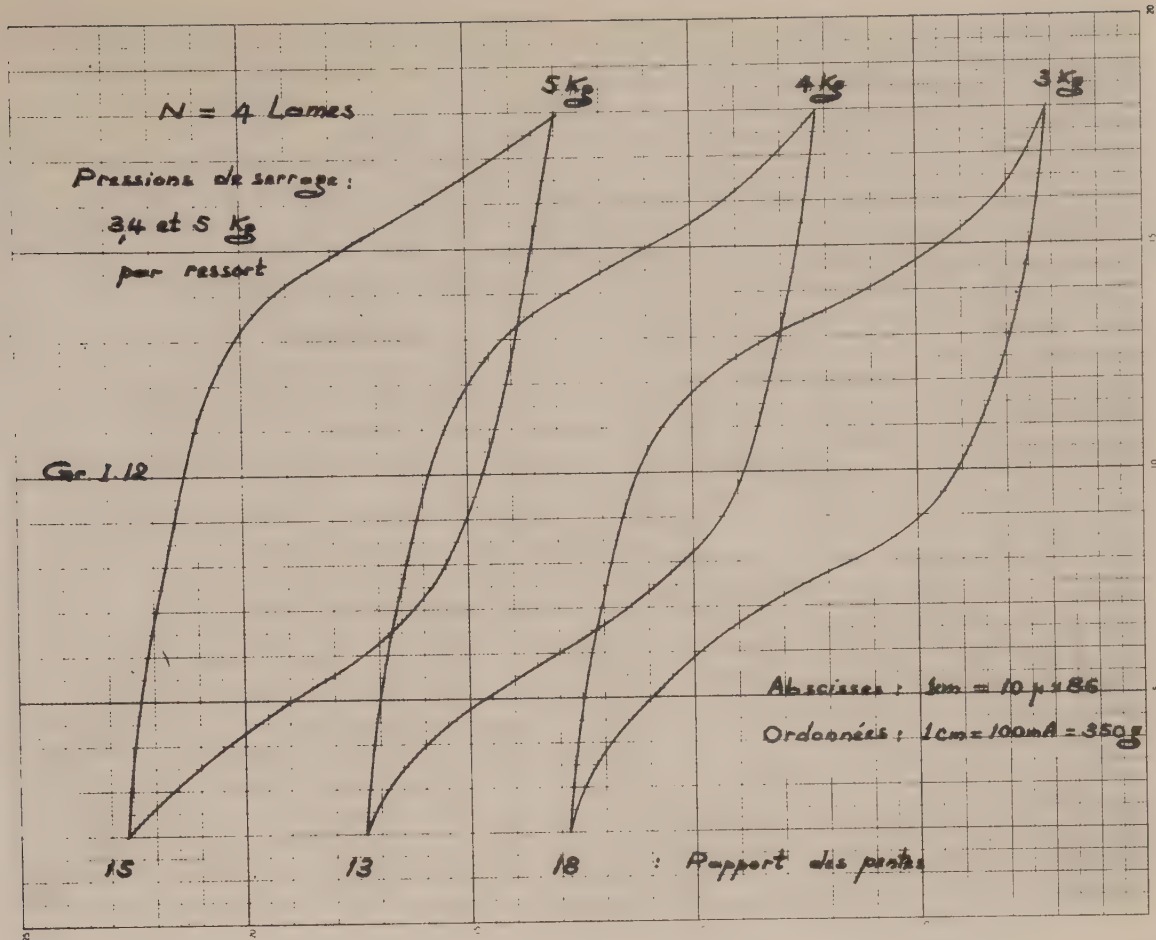


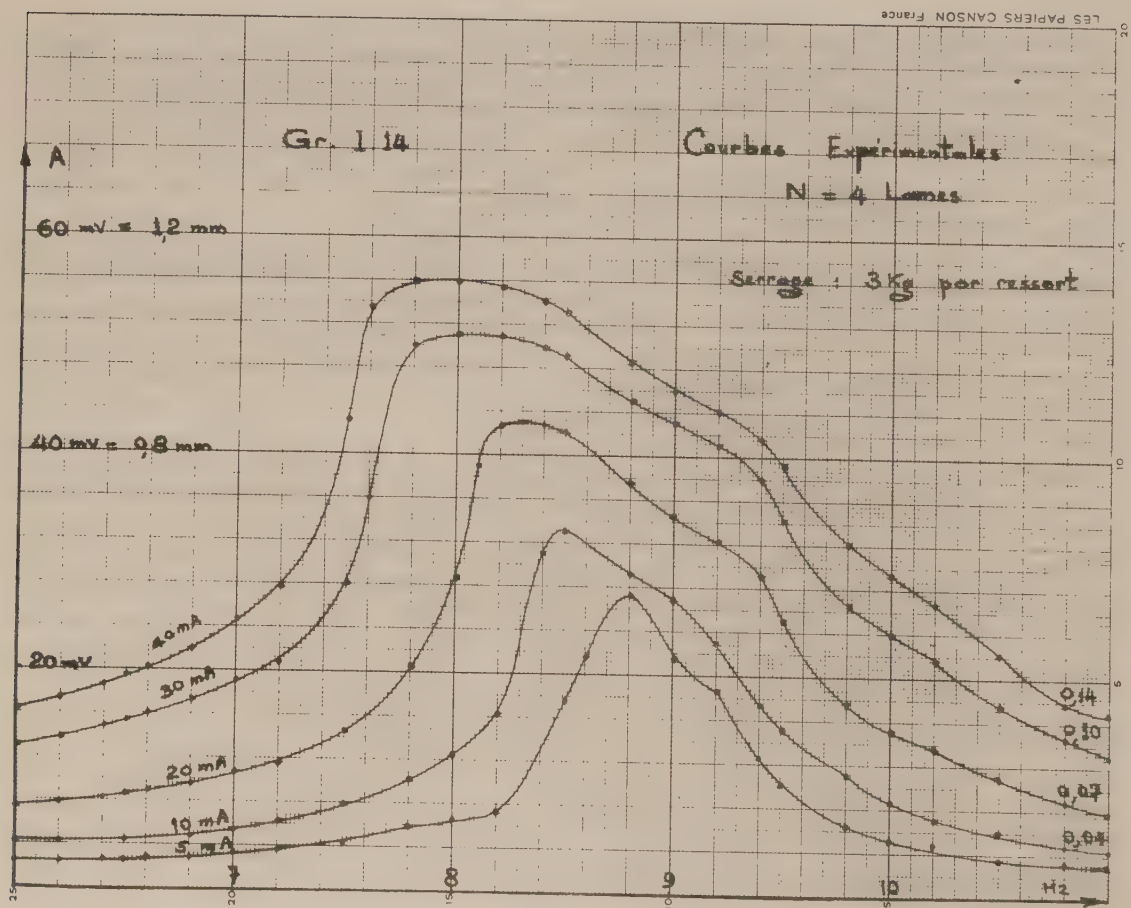
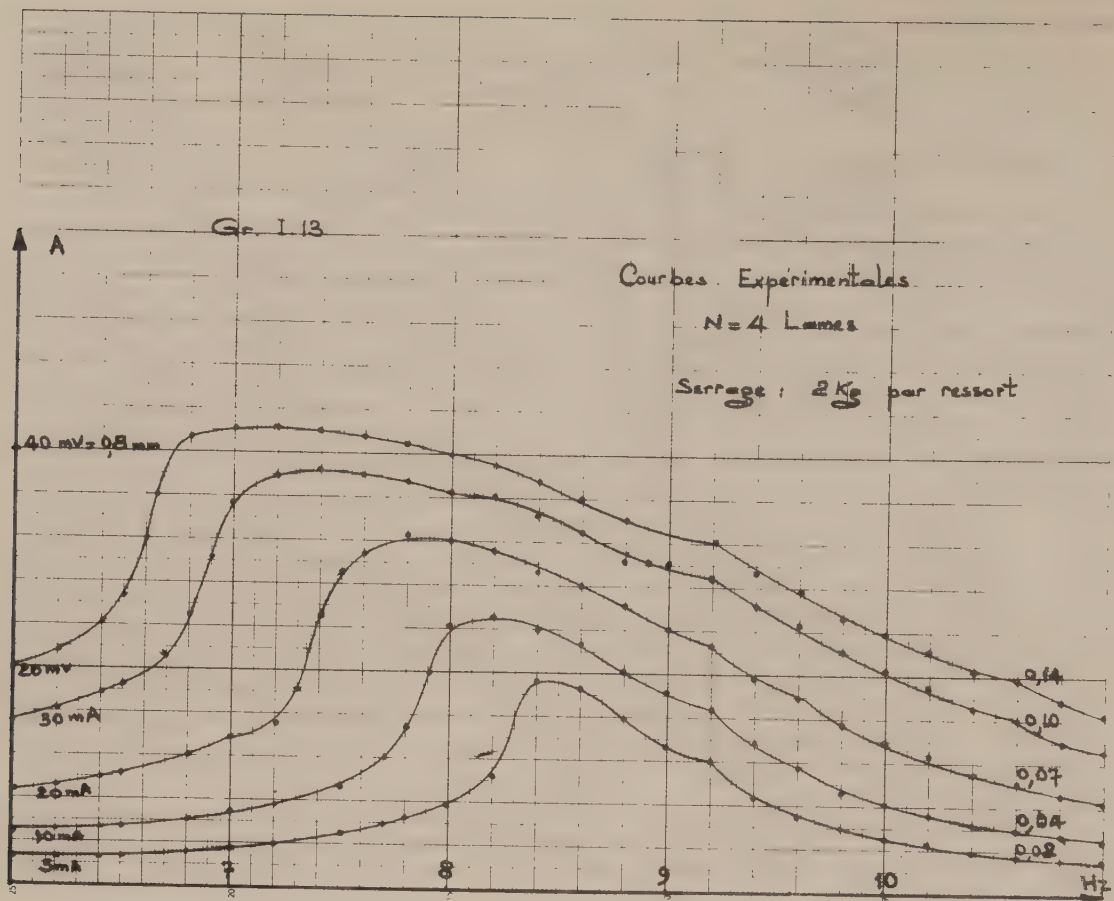
Le système à deux lames avec les appareils de mesure

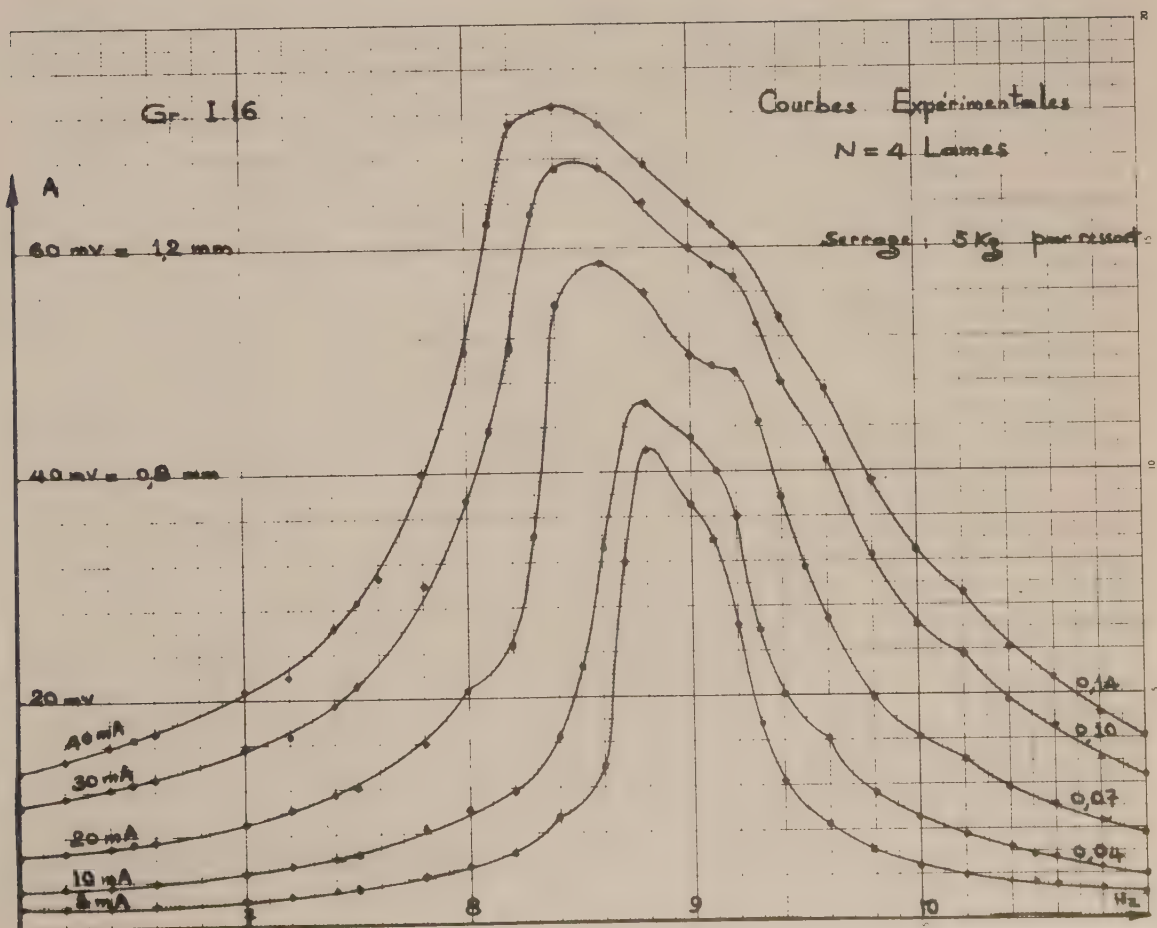
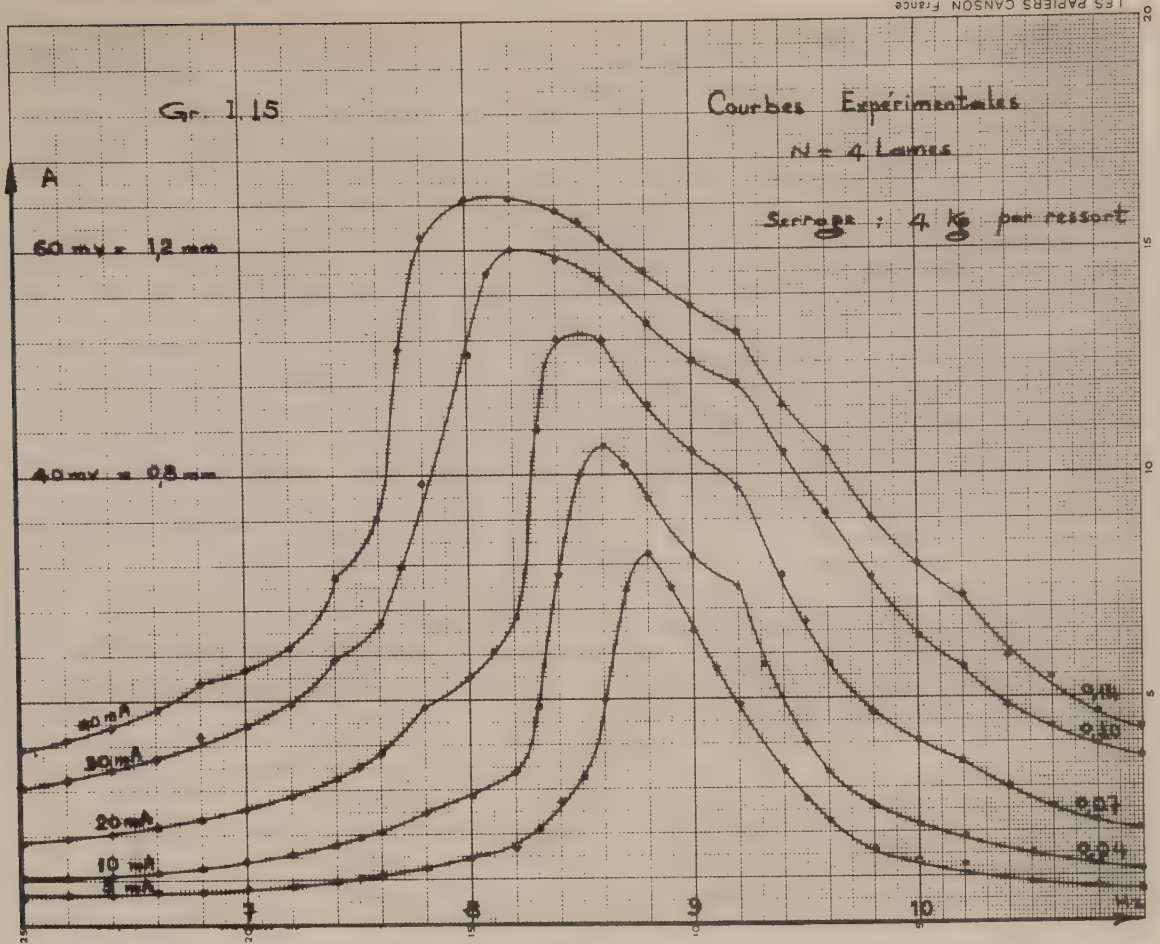


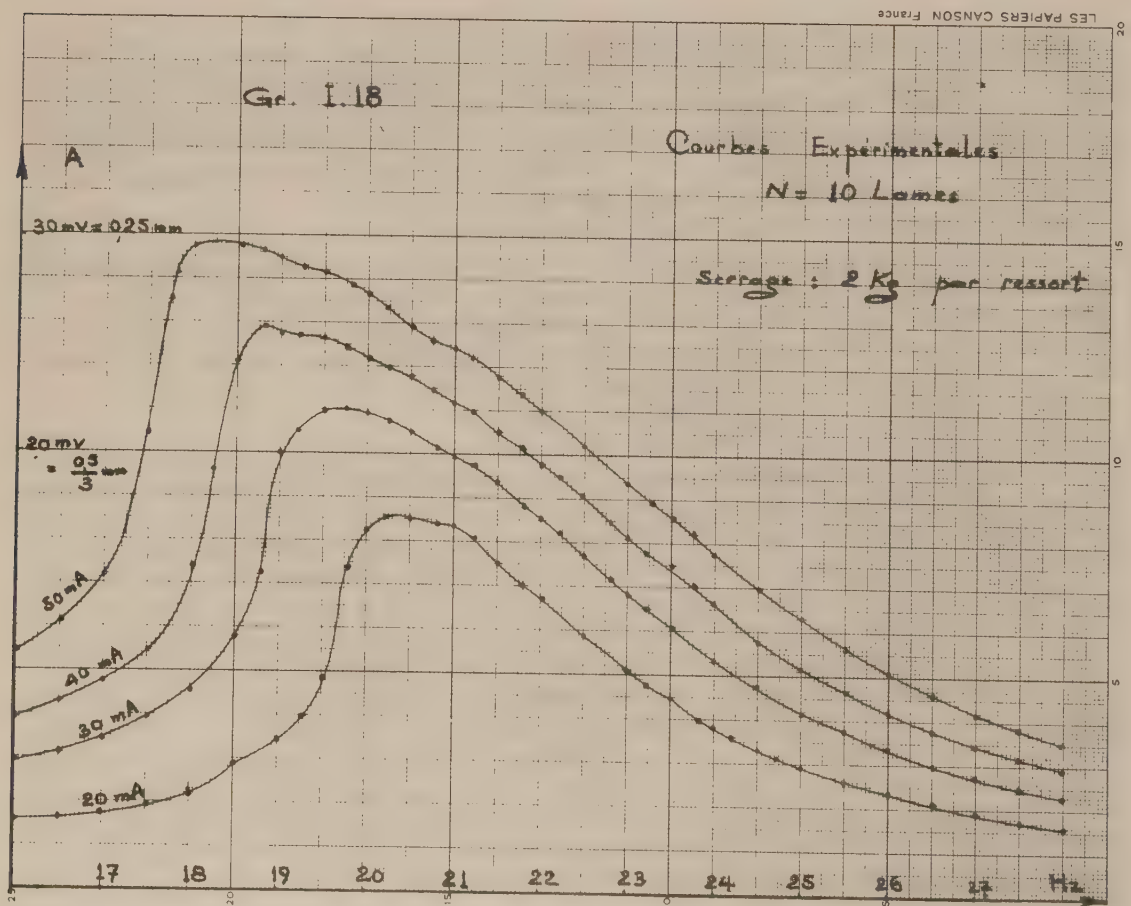
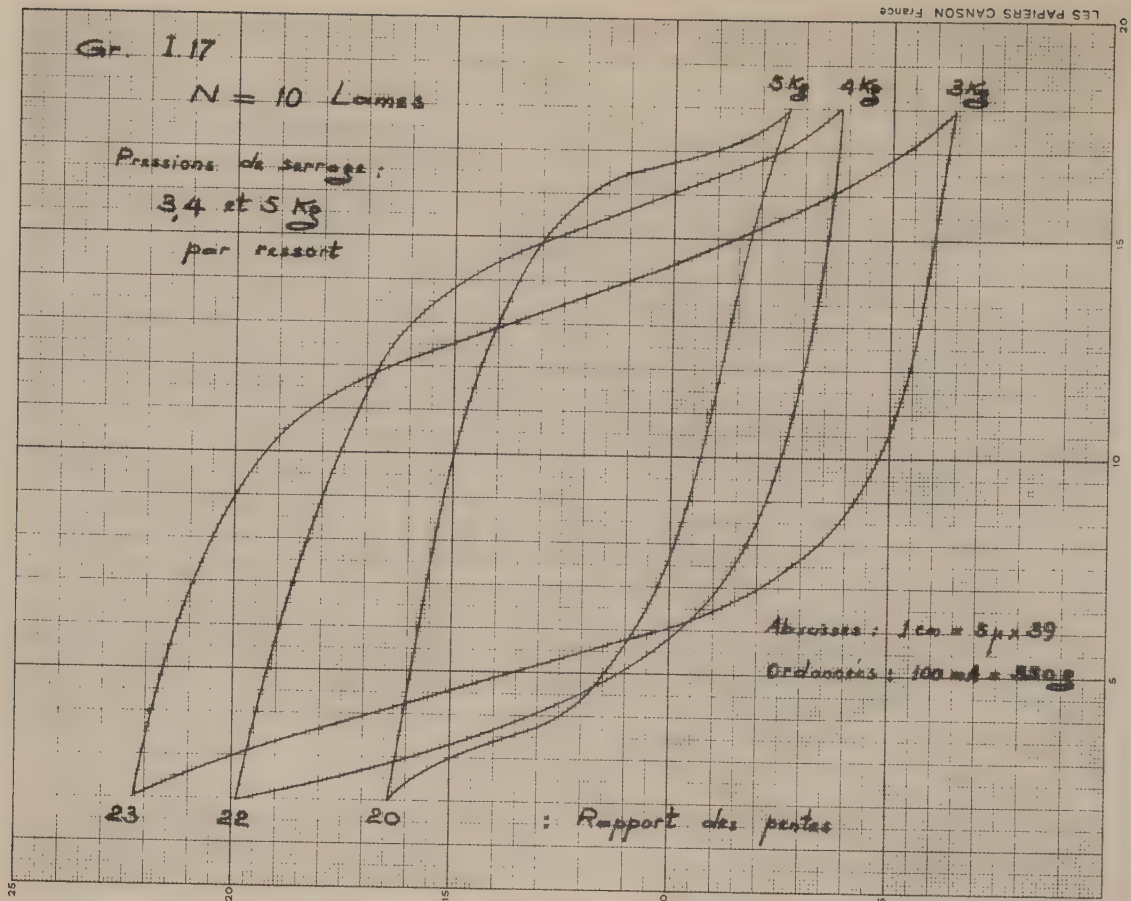


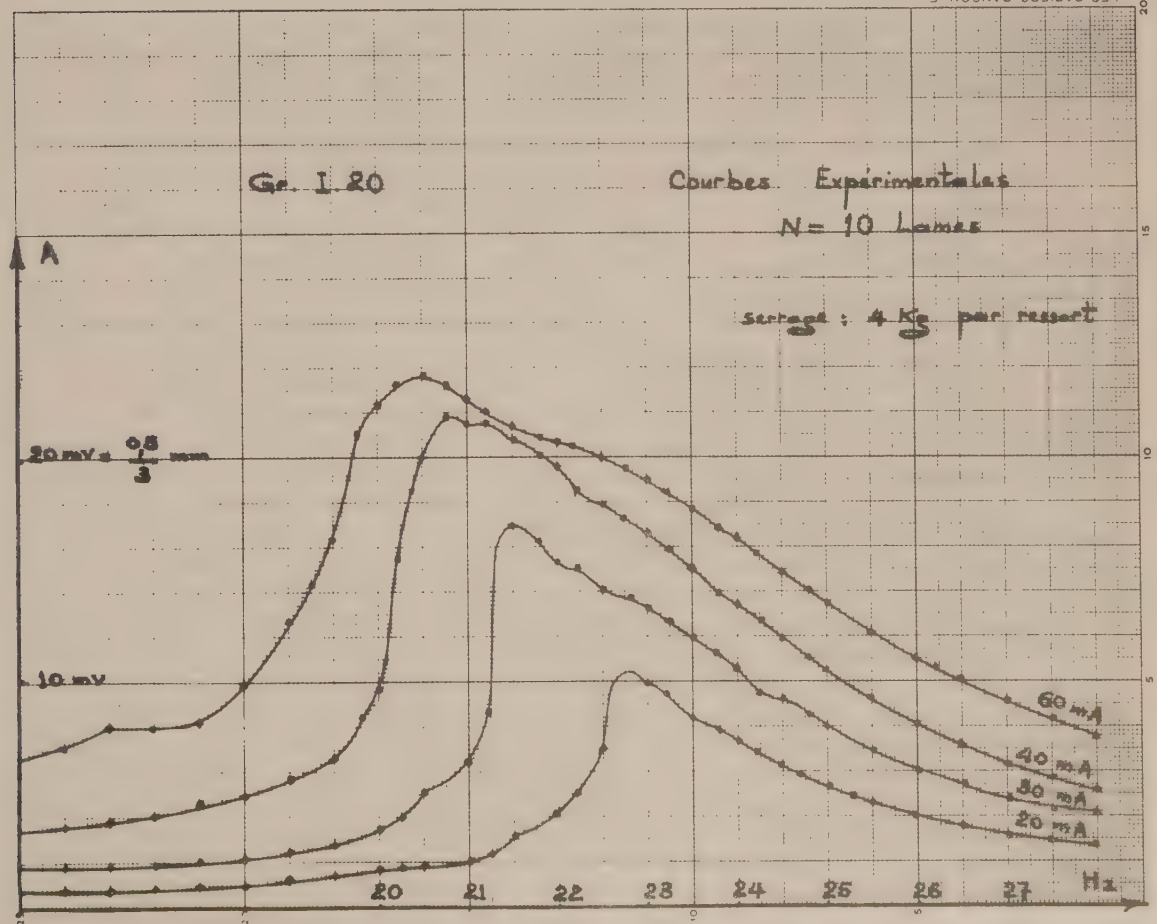
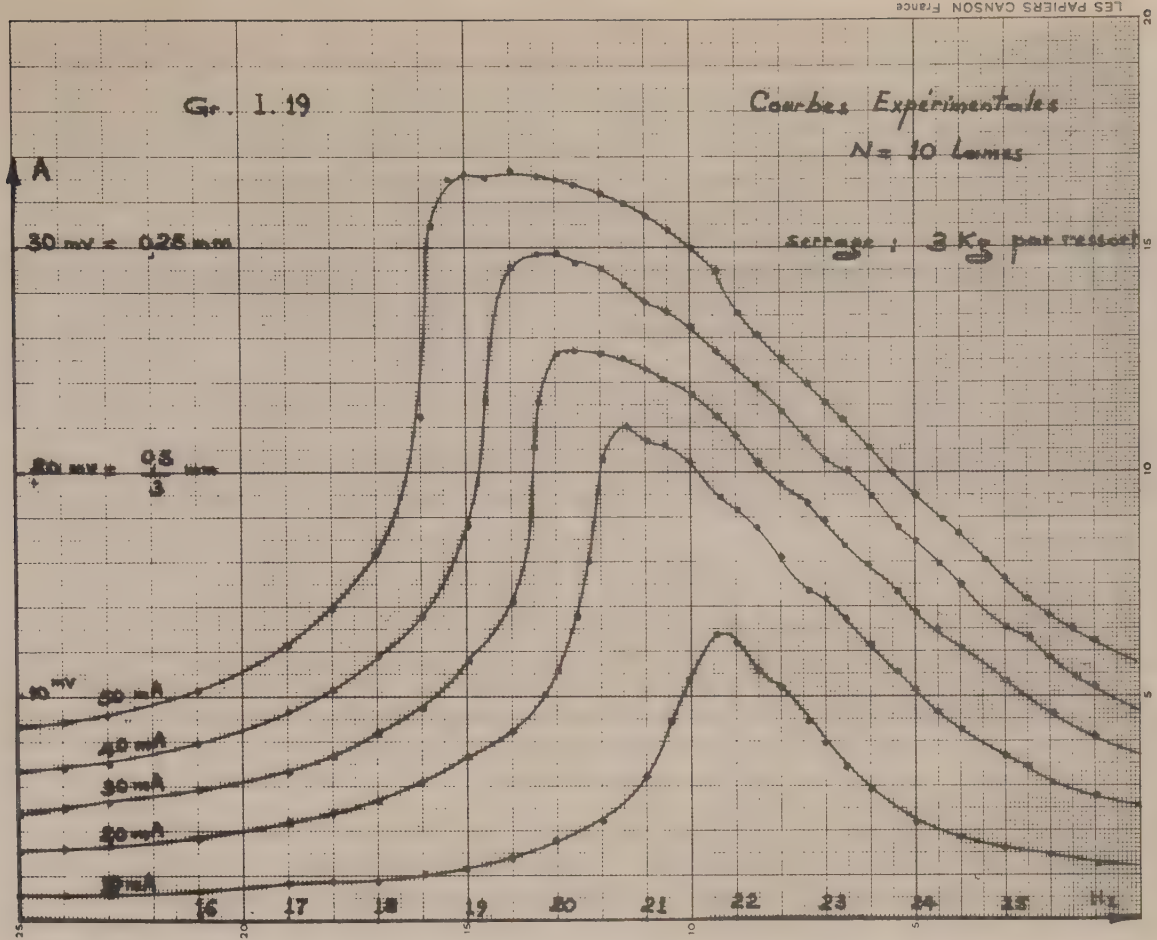








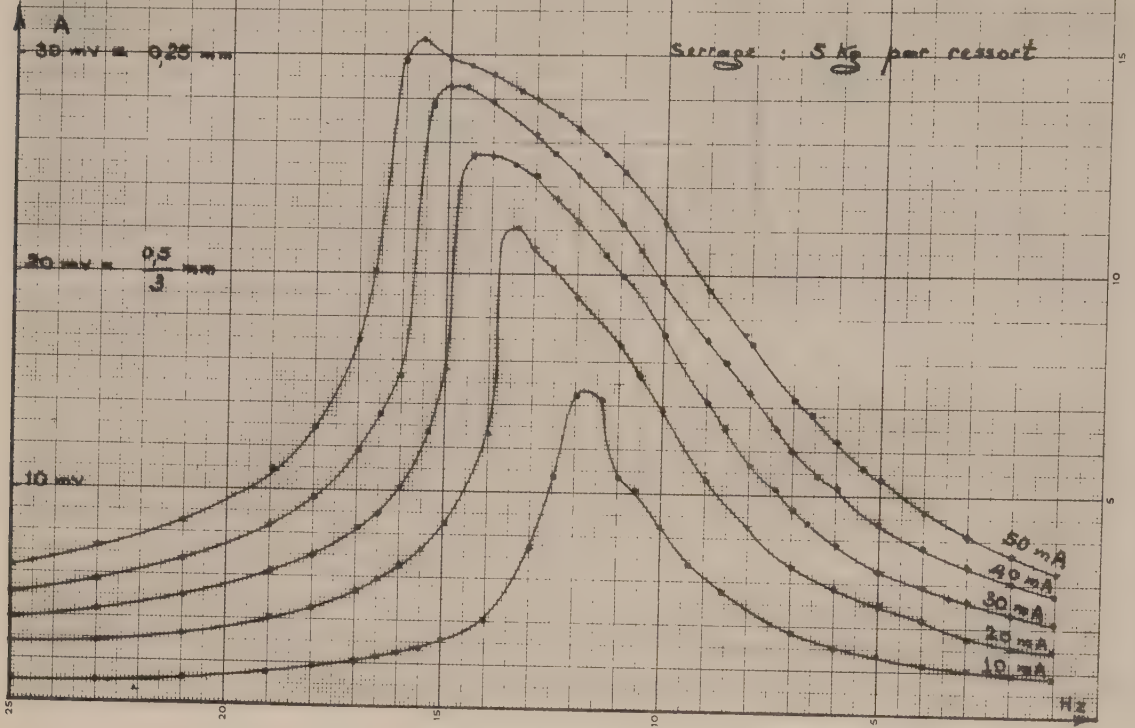




Gr. I.21

Courbes Experimentales
N = 10 Lames

Serrage : 5 kg par ressort



Conclusions du premier chapitre :

Le système à hystérésis multilinéaire et à un seul degré de liberté a été étudié aussi complètement que possible . La vérification expérimentale, bien que partielle, peut être considérée comme satisfaisante étant donné la difficulté de réalisation des hypothèses théoriques : coefficient de frottement constant et pression de serrage uniforme et vu la précision médiocre avec laquelle le coefficient de frottement μ est connu .

De cette étude, nous pouvons retenir les résultats particuliers suivants :

- 1 - Le système possède une résonance du type « mou » : la résonance se déplace vers les basses fréquences lorsque l'amplitude augmente .
- 2 - La résonance d'amplitude est confondue avec la résonance de phase, mais ce phénomène ne peut pas être vérifié expérimentalement à cause de la présence permanente d'un amortissement visqueux qui écarte les deux types de résonance .
- 3 - Le lieu des points à tangente verticale est unique, donc le régime stationnaire est toujours stable.
- 4 - Une étude statique peut nous donner des renseignements concernant le comportement dynamique du système et la forme des courbes de résonance. L'étude statique nous permet, en effet, d'avoir la valeur exacte de $S(A)$ et une valeur approchée de $C(A)$.
- 5 - D'après ce qui précède, nous pouvons déduire que le caractère approximatif de la méthode de l'équilibre harmonique (ou de la linéarisation équivalente) en mécanique non linéaire , est dû à l'imprécision sur la valeur de la raideur équivalente .

÷
÷ ÷
÷

Chapitre Deuxième

**ETUDE D'UN SYSTEME A DEUX DEGRES
DE LIBERTE DECOUPLES**

INTRODUCTION :

Dans le chapitre précédent, nous avons fait une étude statique assez complète qui nous a permis de connaître les forces au début des différentes phases de glissement, de tracer les cycles d'hystérésis et de mettre le système en équation pour l'étude dynamique. Cette étude statique peut se faire de la même façon dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté découplés et à hystérésis multilinéaire.

Dans ce chapitre, nous supposons que la forme du cycle est connue et nous ne ferons qu'une étude dynamique. De plus, nous avons vu que l'étude dynamique dépend seulement des valeurs de $C(A)$ et $S(A)$ qui se calculent dans tous les cas aussi facilement que dans le cas d'un hystérésis bilinéaire, ce qui nous permet de simplifier le problème en supposant que les cycles décrits sont bilinéaires.

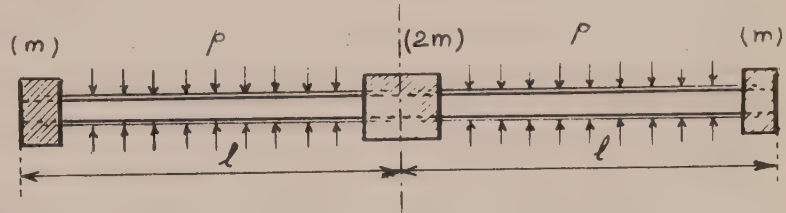
L'intérêt de ce chapitre réside en l'application de la méthode de l'équilibre harmonique à un système à deux degrés de liberté découplés. Cette application va nous permettre d'avoir les courbes de réponse à une excitation harmonique et à démontrer, en particulier, que le système se comporte comme un système linéaire au voisinage de la résonance en ce qui concerne les modes propres.

Cette importante propriété va nous conduire à esquisser une nouvelle méthode reposant sur la recherche des réponses équiphasées, qui nous permet d'avoir les courbes « squelettes » même dans le cas d'un système non linéaire à plusieurs degrés de liberté non découplés, si l'on peut lui associer un système linéaire adjoint.

A - ETUDE THEORIQUE

Description du modèle : Pour schématiser un système à deux degrés de liberté découplés, nous considérons une poutre en acier à section rectangulaire de longueur 2ℓ , suspendue, et à extrémités libres. Chacune de ces extrémités porte une masse concentrée (m) . Une troisième masse $(2m)$ est fixée au milieu. En éliminant la fréquence nulle, la poutre sera assimilée à un système à deux degrés de liberté. Quatre lames d'aluminium (pour éviter l'interaction moléculaire), chacune ayant une longueur légèrement inférieure à L , frottent sur deux côtés de la poutre. Les lames sont serrées contre la poutre le long de deux côtés parallèles et entre les masses concentrées; leur serrage est assuré au moyen de bracelets en caoutchouc, identiques, et de nombre variable. (fig. 2.1)

fig. 2.1



I - Etude du système linéaire (sans frottement)

Nous allons considérer ici le système précédent mais sans lames d'aluminium.

a) Mise en équation :

Appelons K la raideur de chaque moitié de la poutre et x_i le déplacement de la masse (i) avec $i = 1, 2, 3$, soumise à une force F_i .

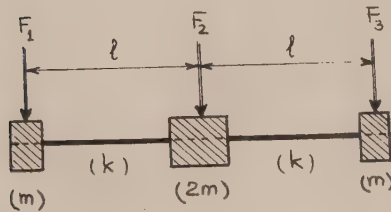


fig. 2.2

Les théorèmes généraux ou les équations de Lagrange nous donnent facilement le système suivant:

$$m \ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = F_1 \cos \omega t$$

$$2m \ddot{x}_2 - K(x_1 - x_2) + K(x_2 - x_3) = F_2 \cos \omega t \quad (2.1)$$

$$m \ddot{x}_3 + K(x_3 - x_2) = F_3 \cos \omega t$$

Pour éliminer la fréquence nulle, nous allons poser :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 \\ y_2 &= x_3 - x_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le système (2.1) devient avec les nouvelles variables :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 3Ky_1 + Ky_2 &= E_1 \cos \omega t \\ \ddot{y}_2 + 3Ky_2 + Ky_1 &= E_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec

$$2m + 1$$

$$\frac{1}{m} \left(F_1 - \frac{F_2}{2} \right) = E_1$$

$$\frac{1}{m} \left(F_3 - \frac{F_2}{2} \right) = E_2$$

b) Formes propres :

α) Fréquences propres :

En écriture matricielle, nous avons :

$$[K] = K \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fréquences propres sont données par l'équation caractéristique : $\det [K - \lambda M] = 0$
c'est-à-dire qu'elles sont les racines de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} 3K - \lambda & K \\ K & 3K - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Ces racines sont :

$$\lambda_1 = 2K \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 4K$$

d'où les fréquences propres :

$$\omega_{01}^2 = \frac{2K}{2m} = \frac{K}{m} \quad (2.4)$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{4K}{2m} = \frac{2K}{m} = 2 \omega_{01}^2$$

$$\text{avec } K = \frac{3EI}{l^3}$$

β) Vecteurs propres :

$$\text{Pour } \lambda = 2K \text{ nous avons } \begin{bmatrix} 3K - 2K & K \\ K & 3K - 2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $y_1 = -y_2$ d'où la forme propre correspondante (fig.2.3)

$$\text{Pour } \lambda = 4K, \text{ nous avons } \begin{bmatrix} 3K - 4K & K \\ K & 3K - 4K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $y_1 = y_2$ d'où la forme propre correspondante (fig.2.4)



fig. 2.3



fig. 2.4

Donc finalement, les formes propres sont données par :

$$\frac{y_1}{y_2} = \pm 1 \quad (2.5)$$

II.-Etude du système non linéaire :

1°) Mise en équation -

De la même façon que dans le cas linéaire, les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 + g(y_1, \dot{y}_1) &= F_1 \cos \omega t \\ 2m \ddot{x}_2 - g(y_2, \dot{y}_2) - g(y_1, \dot{y}_1) &= F_2 \cos \omega t \\ m \ddot{x}_3 + g(y_2, \dot{y}_2) &= F_3 \cos \omega t \end{aligned}$$

ou avec les variables y_1, y_2 :

$$\begin{aligned} 2m \ddot{y}_1 + 3g(y_1, \dot{y}_1) + g(y_2, \dot{y}_2) &= (2F_1 - F_2) \cos \omega t \\ 2m \ddot{y}_2 + 3g(y_2, \dot{y}_2) + g(y_1, \dot{y}_1) &= (2F_3 - F_2) \cos \omega t \end{aligned}$$

qui peuvent encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 3f_1(y_1, \dot{y}_1) + f_2(y_2, \dot{y}_2) &= E_1 \cos \omega t \\ \ddot{y}_2 + 3f_2(y_2, \dot{y}_2) + f_1(y_1, \dot{y}_1) &= E_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec :

$$f_i(y_i, \dot{y}_i) = \frac{g(y_i, \dot{y}_i)}{2m}$$

$$E_1 = \frac{2F_1 - F_2}{2m} \quad E_2 = \frac{2F_3 - F_2}{2m}$$

Etant donné que les lames d'aluminium agissent indépendamment sur chaque moitié de la poutre, les forces $f_i(y_i, \dot{y}_i)$ qui sont représentées par des cycles fermés sont les mêmes quel que soit i ($i=1, 2$)

2°) Détermination du cycle :

Le cycle représentant la force f_i (fig.2.5) est déterminé si nous connaissons les équations des différents segments; nous avons ainsi :

Equation de OB : $f_i = y_i$

CD : $f_i = y_i + (1 - \alpha)(1 - A_i)$ (2.7)

DE : $f_i = \alpha y_i - 1 + \alpha$

avec $\alpha = \frac{R_i - 1}{A_i - 1}$ pente après glissement (pente du segment HC)

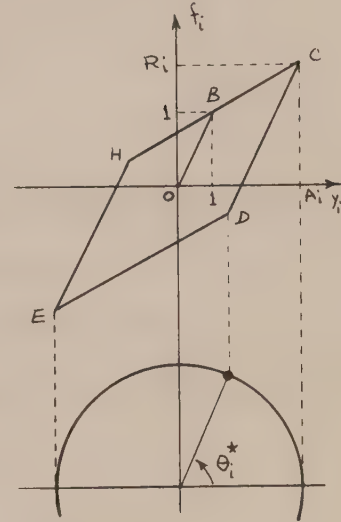


fig. 2.5

3°) Méthode de calcul :

Nous utiliserons la même méthode que dans le cas d'un seul degré de liberté, dite de l'équilibre harmonique de KRYLOV et BOGOLIOBOV.

Nous cherchons donc des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos \theta_1 \\ y_2 &= A_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \theta_1 &= \omega t - \phi_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 - \phi_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

En dérivant (2.8) par rapport au temps, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\omega A_1 \sin \theta_1 + \dot{A}_1 \cos \theta_1 + A_1 \dot{\phi}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{y}_2 &= -\omega A_2 \sin \theta_2 + \dot{A}_2 \cos \theta_2 + A_2 \dot{\phi}_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Pour avoir des solutions harmoniques, nous allons poser :

$$\dot{A}_1 \cos \theta_1 + A_1 \dot{\phi}_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (2.10 \text{ a})$$

$$\dot{A}_2 \cos \theta_2 + A_2 \dot{\phi}_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (2.10 \text{ b})$$

Avec ces conditions les dérivées secondes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -\omega^2 A_1 \cos \theta_1 - \omega \dot{A}_1 \sin \theta_1 + \omega A_1 \dot{\phi}_1 \cos \theta_1 \\ \ddot{y}_2 &= -\omega^2 A_2 \cos \theta_2 - \omega \dot{A}_2 \sin \theta_2 + \omega A_2 \dot{\phi}_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Substituons dans (2.6)

$$-\omega^2 A_1 \cos \theta_1 - \omega \dot{A}_1 \sin \theta_1 + \omega A_1 \dot{\phi}_1 \cos \theta_1 + 3f_1(A_1, \theta_1) + f_2(A_2, \theta_2) = E_1 \cos(\theta_1 + \phi_1) \quad (2.11)$$

$$-\omega^2 A_2 \cos \theta_2 - \omega \dot{A}_2 \sin \theta_2 + \omega A_2 \dot{\phi}_2 \cos \theta_2 + 3f_2(A_2, \theta_2) + f_1(A_1, \theta_1) = E_2 \cos(\theta_2 + \phi_1 + \phi_2) \quad (2.12)$$

Effectuons maintenant les opérations suivantes :

$$(10a) \times \omega \cos \theta_1 - (11) \times \sin \theta_1 = P_1$$

$$(10a) \times \omega \sin \theta_1 + (11) \times \cos \theta_1 = P_2$$

$$(10b) \times \omega \cos \theta_2 - (12) \times \sin \theta_2 = P_3$$

$$(10b) \times \omega \sin \theta_2 - (12) \times \cos \theta_2 = P_4$$

Nous considérons après les valeurs moyennes calculées le long d'une période des quantités précédentes P_i ; ces valeurs moyennes sont données par :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_i d\theta$$

Nous aboutissons finalement aux quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & -2\omega \dot{A}_1 + 3S_1(A_1) + C_2(A_2) \sin \phi_2 + S_2(A_2) \cos \phi_2 = -E_1 \sin \phi_1 \\
 & -\omega^2 A_1 + 2\omega A_1 \dot{\phi}_1 + 3C_1(A_1) + C_2(A_2) \cos \phi_2 - S_2(A_2) \sin \phi_2 = E_1 \cos \phi_1 \quad (2.13) \\
 & -2\omega \dot{A}_2 + 3S_2(A_2) + S_1(A_1) \cos \phi_2 - C_1(A_1) \sin \phi_2 = -E_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) \\
 & -\omega^2 A_2 + 2\omega A_2 \dot{\phi}_2 + 3C_2(A_2) + C_1(A_1) \cos \phi_2 + S_1(A_1) \sin \phi_2 = E_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)
 \end{aligned}$$

avec

$$C_i(A_i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(y_i, \dot{y}_i) \cos \theta_i d\theta_i \quad (2.14)$$

$$S_i(A_i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(y_i, \dot{y}_i) \sin \theta_i d\theta_i \quad (2.15)$$

L'angle $\theta = \theta_i^*$ qui correspond au début du glissement (point D de la figure 5) sera défini par :

$$\cos \theta_i^* = \frac{A_i - 2}{A_i} \quad (2.16)$$

Le système de quatre équations (2.13) à quatre inconnues : A_1 , A_2 , ϕ_1 et ϕ_2 étant difficile à étudier dans le cas général, nous allons nous limiter à l'étude du régime stationnaire seulement .

4°) Etude du régime stationnaire

En régime stationnaire, nous avons :

$$\dot{A}_i = \dot{\phi}_i = 0$$

Les équations (13) précédentes deviennent donc :

$$3S_{10} + S_{20} \cos \phi_{20} + C_{20} \sin \phi_{20} = -E_1 \sin \phi_{10} \quad (2.17)$$

$$-\omega^2 A_{10} + 3C_{10} + C_{20} \cos \phi_{20} - S_{20} \sin \phi_{20} = E_1 \cos \phi_{10} \quad (2.18)$$

$$3S_{20} + S_{10} \cos \phi_{20} - C_{10} \sin \phi_{20} = -E_2 \sin(\phi_{10} + \phi_{20}) \quad (2.19)$$

$$-\omega^2 A_{20} + 3C_{20} + C_{10} \cos \phi_{20} + S_{10} \sin \phi_{20} = E_2 \cos(\phi_{10} + \phi_{20}) \quad (2.20)$$

L'indice (o) caractérise le régime stationnaire.

La somme des carrés des deux premières équations nous donne :

$$\begin{aligned}
 E_1^2 = & 9S_{10}^2 + C_{20}^2 + S_{20}^2 + 9C_{10}^2 + \omega^4 A_{10}^2 + \omega^2 A_{10} (-6C_{10} - 2C_{20} \cos \phi_{20} + 2S_{20} \sin \phi_{20}) \\
 & + 6(C_{10}C_{20} - S_{10}S_{20}) \cos \phi_{20} + 6(S_{10}C_{20} - C_{10}S_{20}) \sin \phi_{20}
 \end{aligned}$$

Si nous éliminons $\cos \phi_{10}$ et $\sin \phi_{10}$ dans (2.17 et 2.18) nous obtenons :

$$\sin \phi_{10} = - \frac{3S_{10} + C_{20} \sin \phi_{20} + S_{20} \cos \phi_{20}}{E_1}$$

$$\cos \phi_{10} = \frac{-\omega^2 A_{10} + 3C_{10} + C_{20} \cos \phi_{20} - S_{20} \sin \phi_{20}}{E_1}$$

Remplaçons dans (2.19 et 2.20)

$$(S_{10} - 3 \frac{E_2}{E_1} S_{10}) \cos \phi_{20} - (C_{10} - 3 \frac{E_2}{E_1} C_{10} + \omega^2 A_{10} \frac{E_2}{E_1}) \sin \phi_{20} = S_{20} (\frac{E_2}{E_1} - 3)$$

$$(C_{10} - 3 \frac{E_2}{E_1} C_{10} + \omega^2 A_{10} \frac{E_2}{E_1}) \cos \phi_{20} + S_{10} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) \sin \phi_{20} = C_{20} \frac{E_2}{E_1} - 3 C_{20} + \omega^2 A_{20}$$

d'où finalement :

$$\cos \phi_{20} = \frac{S_{10} S_{20} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) (\frac{E_2}{E_1} - 3) + [C_{20} (\frac{E_2}{E_1} - 3) + \omega^2 A_{20}] [C_{10} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) + \omega^2 A_{10} \frac{E_2}{E_1}]}{S_{10}^2 (1 - 3 \frac{E_2}{E_1})^2 + [C_{10} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) + \omega^2 A_{10} \frac{E_2}{E_1}]^2} \quad (2.21)$$

$$\sin \phi_{20} = \frac{S_{10} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) [C_{20} (\frac{E_2}{E_1} - 3) + \omega^2 A_{20}] - S_{20} (\frac{E_2}{E_1} - 3) [C_{10} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) + \omega^2 A_{10} \frac{E_2}{E_1}]}{S_{10}^2 (1 - 3 \frac{E_2}{E_1})^2 + [C_{10} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) + \omega^2 A_{10} \frac{E_2}{E_1}]^2} \quad (2.22)$$

En exprimant que $\sin^2 \phi_{20} + \cos^2 \phi_{20} = 1$, nous arrivons à l'équation suivante :

$$[A_{20}^2 - A_{10}^2 (\frac{E_2}{E_1})^2] \omega^4 + 2 \omega^2 [A_{20} C_{20} (\frac{E_2}{E_1} - 3) - A_{10} C_{10} \frac{E_2}{E_1} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1})] + (S_{20}^2 + C_{20}^2) (\frac{E_2}{E_1} - 3)^2 - (S_{10}^2 + C_{10}^2) (1 - 3 \frac{E_2}{E_1})^2 = 0 \quad (2.23)$$

Equation du second degré en ω^2 qui possède, pour $A_{20} \neq A_{10} \frac{E_2}{E_1}$, les deux racines suivantes :

$$\omega^2 = \frac{-A_{20} C_{20} (\frac{E_2}{E_1} - 3) + A_{10} C_{10} (\frac{E_2}{E_1}) (1 - 3 \frac{E_2}{E_1})}{A_{20}^2 - A_{10}^2 (\frac{E_2}{E_1})^2} \pm \frac{\sqrt{[A_{20} C_{20} (\frac{E_2}{E_1} - 3) - A_{10} C_{10} (1 - 3 \frac{E_2}{E_1}) \frac{E_2}{E_1}]^2 - [A_{20}^2 - A_{10}^2 (\frac{E_2}{E_1})^2] [(S_{20}^2 + C_{20}^2) (\frac{E_2}{E_1} - 3)^2 - (S_{10}^2 + C_{10}^2) (1 - 3 \frac{E_2}{E_1})^2]}}{A_{20}^2 - A_{10}^2 (\frac{E_2}{E_1})^2} \quad (2.24)$$

C'est une première équation à deux inconnues A_1 et A_2 , une deuxième équation en A_1 et A_2 peut être obtenue en écrivant l'expression de E_1^2 après avoir remplacé $\sin \phi_{20}$ et $\cos \phi_{20}$ par leurs expressions (2.21 et 2.22)

5°) Calcul de $C(A_i)$ et $S(A_i)$

Les expressions de $C(A_i)$ et $S(A_i)$ données par (2.14 et 2.15) peuvent être calculées en utilisant pour la détermination du cycle $f_i(y_i, y_i)$ les équations des différents segments (2.7); nous obtenons ainsi :

$$C_{i0}(A_i) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_i^*} [A_i \cos \theta_i + (1-\alpha)(1-A_i)] \cos \theta_i d\theta_i + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_i^*}^{\pi} [\alpha A_i \cos \theta_i - (1-\alpha)] \cos \theta_i d\theta_i$$

$$S_{i0}(A_i) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_i^*} [A_i \cos \theta_i + (1-\alpha)(1-A_i)] \sin \theta_i d\theta_i + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_i^*}^{\pi} [\alpha A_i \cos \theta_i - (1-\alpha)] \sin \theta_i d\theta_i$$

L'intégration nous donne :

$$C_{i0} = \frac{A_i}{\pi} \left[(1-\alpha) \theta_i^* - \frac{1-\alpha}{2} \sin 2 \theta_i^* + \alpha \pi \right] \quad (2.25)$$

$$S_{i0} = -\frac{A_i}{\pi} (1-\alpha) \sin^2 \theta_i^* \quad (2.26)$$

6°) Cas où $E_2 = 0$

Dans ce cas, nous avons $F_2 = F_3 = 0$, c'est-à-dire qu'il y a une seule force d'excitation.

Nous avons, ici, directement, à partir de (2.19 et 2.20) les expressions suivantes :

$$\cos \phi_{20} = \frac{-3 S_{10} S_{20} + (\omega^2 A_{20} - 3 C_{20}) C_{10}}{S_{10}^2 + C_{10}^2}$$

$$\sin \phi_{20} = \frac{S_{10}(\omega^2 A_{20} - 3 C_{20}) + 3 S_{20} C_{10}}{S_{10}^2 + C_{10}^2}$$

En exprimant que $\cos^2 \phi_{20} + \sin^2 \phi_{20} = 1$, nous arrivons à :

$$\omega^2 = \frac{3 C_{20}}{A_{20}} \pm \frac{\sqrt{S_{10}^2 + C_{10}^2 - 9 S_{20}^2}}{A_{20}} \quad (2.27)$$

Une deuxième équation en A_{10} et A_{20} peut être obtenue à partir de (2.17 et 2.18)

$$E_1^2 = (3 S_{10} + C_{20} \sin \phi_{20} + S_{20} \cos \phi_{20})^2 + (-\omega^2 A_{10} + 3 C_{10} + C_{20} \cos \phi_{20} - S_{20} \sin \phi_{20})^2$$

et en remplaçant $\sin \phi_{20}$ et $\cos \phi_{20}$ par leurs expressions :

$$E_1^2 = 9(S_{10}^2 + C_{10}^2) + \omega^4 A_{10}^2 - 17(C_{20}^2 + S_{20}^2) - 6\omega^2 A_{10} C_{10} + 6\omega^2 A_{20} C_{20} + \frac{6\omega^2 A_{10} C_{10}(C_{20}^2 + S_{20}^2) + 2\omega^4 A_{10} A_{20}(S_{10} S_{20} - C_{10} C_{20})}{S_{10}^2 + C_{10}^2} \quad (2.28)$$

7°) Résonance de phase

Pour E_2 quelconque, l'expression de $\text{tg } \phi_{10}$ peut s'écrire :

$$\text{tg } \phi_{10} = \frac{3S_{10} + C_{20} \sin \phi_{20} + S_{20} \cos \phi_{20}}{\omega^2 A_{10} - 3C_{10} - C_{20} \cos \phi_{20} + S_{20} \sin \phi_{20}}$$

A la résonance de phase, nous devons avoir :

$$\phi_{20} = 0 \quad \text{ou} \quad \pi$$

$$\phi_{10} = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{c'est-à-dire que } \text{tg } \phi_{10} \rightarrow \pm \infty)$$

Le dénominateur de l'expression donnant $\text{tg } \phi_{10}$ s'annule pour

$$\omega_1^2 = \frac{3C_{10} - C_{20}}{A_{10}} \quad (2.29)$$

ou pour

$$\omega_2^2 = \frac{3C_{10} + C_{20}}{A_{10}}$$

ω_1 et ω_2 sont les pulsations de résonance de phase.

8°) Etude au voisinage de la résonance pour $E_2=0$

Pour faire cette étude, nous supposons que A_i est relativement grande (au voisinage de la résonance) pour que nous puissions négliger les termes en $(\frac{1}{A_i})$ de degré supérieur à 2, devant les autres termes.

Nous avons ainsi :

$$\cos \theta_i^* = 1 - \frac{2}{A_i}$$

$$\sin^2 \theta_i^* = 4 \left(\frac{1}{A_i} - \frac{1}{A_i^2} \right)$$

$$\sin \theta_i^* \sim \theta_i^* \sim 2 \left(\frac{1}{A_i} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{A_i^{3/2}} - \frac{1}{4A_i^{5/2}} - \frac{1}{8A_i^{7/2}} + \dots$$

$$\sin 2\theta_i^* \sim \frac{4}{A_i^{1/2}} - \frac{10}{A_i^{3/2}} + \frac{7}{2A_i^{5/2}} + \frac{1}{A_i^{7/2}} + \dots$$

$$\theta_i^* - \frac{\sin 2\theta_i^*}{2} \sim \frac{4}{A_i^{3/2}} - \frac{2}{A_i^{5/2}} + \dots$$

$$S_{i0} \sim -\frac{4(1-\alpha)}{\pi} \left(1 - \frac{1}{A_i} \right)$$

$$C_{i0} \sim \alpha A_i + \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \left(\frac{2}{A_i} - \frac{1}{A_i^{3/2}} - \frac{1}{4A_i^{5/2}} \right) + \dots$$

Posons $N = \frac{A_1}{A_2}$

L'équation (27) peut s'écrire avec les approximations précédentes :

$$\omega^2 = \alpha(3 \pm N) + \frac{2(1-\alpha)}{\pi} \left(3 \pm \frac{2}{N^{3/2}}\right) \frac{N}{A_2^{3/2}} \pm \frac{64(1-\alpha)^2}{\alpha \pi^2} \left(\frac{1}{N}\right) \frac{1}{A_2^2} + O\left(\frac{1}{A_2^{5/2}}\right) \quad (2.30)$$

Nous pouvons encore écrire l'équation (2.28) avec ces mêmes approximations; nous obtenons ainsi, après de longues transformations :

$$\begin{aligned} E_1^2 = E^2 = \alpha^2 (N^4 + 1 - 2N^2) A_2^2 \\ + \frac{4\alpha(1-\alpha)}{\pi} (1 - N^2) \left[\pm 3(1 - N^2) + 2(1 - N^{3/2}) - (6 \mp 5) \frac{1}{N^{1/2}} + \frac{15 \pm 24}{2} \cdot \frac{1}{N} - \frac{36}{N^{3/2}} + \frac{54}{N^2} \pm \frac{5}{N^{5/2}} \right] A_2^{1/2} \\ + \frac{16(1-\alpha)^2}{\pi^2} \left[8N^2 - (2 \mp 6)N + (24 \mp 12) - (18 \mp 83) \frac{1}{N} - \frac{5}{N^2} \right] + O\left(\frac{1}{A_2^{1/2}}\right) \quad (2.31) \end{aligned}$$

Pour que l'expression de E_1 reste limitée lorsque A_2 devient grande, il faut que les coefficients de $A_2^{1/2}$ et A_2^2 soient nuls simultanément, c'est-à-dire que nous ayons :

$$\begin{aligned} N^4 + 1 - 2N^2 \\ (1 - N^2) \text{ [1er crochet]} = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs de N qui vérifient simultanément ces deux équations sont :

$$N = \pm 1 \quad (2.32)$$

Nous retrouvons donc les modes propres du système linéaire et l'expression (2.32) n'est autre que l'expression (2.5) ce qui est normal, étant donné qu'à la résonance de phase, les réponses sont équiphases (à π près) et le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ qui est ici égal à $\frac{A_1}{A_2}$ doit être constant; ce rapport ne peut pas être différent de celui du cas linéaire.

Nous pouvons remarquer que pour A_2 très grande, nous avons

$$\omega^2 \simeq \alpha (3 \pm 1)$$

Pour $\alpha = 1$, nous retrouvons les fréquences propres du système linéaire.

9°) Courbes « squelettes »

Nous allons appeler ainsi les courbes dans le plan (amplitude - fréquence) à la résonance de phase (nous supposons que la résonance d'amplitude diffère très peu de la résonance de phase). Pour chaque mode de vibration, nous avons une famille de courbes « squelettes » dépendant de la valeur de α (variable de 1 à 0). Les équations des courbes squelettes sont les suivantes :

$$\omega^2 = \frac{1}{A_{10}} (3 C_{10} \pm C_{20}) \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{1}{A_{20}} (3 C_{20} \pm C_{10})$$

dans lesquelles nous pouvons remplacer $A_{10} = A_{20} = A$. Le signe $-$ correspond au 1^{er} mode et le signe $+$ au 2^{ème} mode.

Ces équations peuvent encore s'écrire :

$$\omega^2 = \frac{4}{\pi} \left\{ (1-\alpha) \operatorname{Arc} \cos \left(1 - \frac{2}{A}\right) + \alpha \pi - \frac{1-\alpha}{2} \sin \left[2 \operatorname{Arc} \cos \left(1 - \frac{2}{A}\right)\right] \right\}$$

$$\omega^2 = \frac{2}{\pi} \left\{ (1-\alpha) \operatorname{Arc} \cos \left(1 - \frac{2}{A}\right) + \alpha \pi - \frac{1-\alpha}{2} \sin \left[2 \operatorname{Arc} \cos \left(1 - \frac{2}{A}\right)\right] \right\}$$

Asymptotes verticales : $\omega^2 = 4\alpha$ et $\omega^2 = 2\alpha$

Pour $A=1$, limite de la flèche du non glissement des lames, nous obtenons respectivement $\omega^2 = 4$ et $\omega^2 = 2$, c'est-à-dire les valeurs des fréquences propres du système linéaire.

III - Recherche des réponses équi phases :

Nous allons essayer de trouver des réponses équi phases (à π près) ; l'étude nous permet de calculer les valeurs de E_1 et E_2 à une fréquence donnée qui peuvent conduire à des réponses en phase ; les excitations E_1 et E_2 étant supposées équi phases. Cette étude nous permet aussi de tracer les courbes « squelettes » étant donné que les résonances de phase correspondent à des réponses équi phases, quelle que soit l'excitation.

Mise en équation et résolution .

Dans le cas de réponses équi phases, nous avons $\varphi_2 = 0$ ou π , donc les équations (2.17) - (2.20) s'écrivent :

$$\begin{aligned} 3S_{10} \pm S_{20} &= -E_1 \sin \varphi \\ -\omega^2 A_{10} + 3C_{10} \pm C_{20} &= E_1 \cos \varphi \\ 3S_{20} \pm S_{10} &= \mp E_2 \sin \varphi \\ -\omega^2 A_{20} + 3C_{20} \pm C_{10} &= \pm E_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.33)$$

quatre équation à quatre inconnues : $\frac{E_2}{E_1}$, φ , A_1 et A_2 .

D'après ces équations, nous avons :

$$\pm \frac{E_1}{E_2} = \frac{3S_{10} \pm S_{20}}{3S_{20} \pm S_{10}} = \frac{\omega^2 A_{10} - 3C_{10} \mp C_{20}}{-\omega^2 A_{20} + 3C_{20} \pm C_{10}}$$

ce qui nous donne aussi :

$$\omega^2 = \frac{(3S_{10} \pm S_{20})(3C_{20} \pm C_{10}) + (3S_{20} \pm S_{10})(3C_{10} \pm C_{20})}{A_{10}(3S_{20} \pm S_{10}) + A_{20}(3S_{10} \pm S_{20})} \quad (2.34)$$

Le déphasage φ entre l'excitation et la réponse peut être donné par sa tangente :

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{3S_{10} \pm S_{20}}{-\omega^2 A_{10} + 3C_{10} \pm C_{20}} = \frac{3S_{20} \pm S_{10}}{-\omega^2 A_{20} + 3C_{20} \pm C_{10}} \quad (2.35)$$

L'équation (2.34) et la deuxième égalité (2.35) nous donnent A_{10} et A_{20} en fonction de ω .

A la résonance de phase, nous avons $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ ($\tan \phi \rightarrow \infty$) ce qui correspond d'après (2.35) à :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3C_{20} \pm C_{10}}{A_{20}} = \frac{3C_{10} \pm C_{20}}{A_{10}}$$

Nous obtenons donc les mêmes expressions que lors de l'étude des réponses quelconques (29) .

Donc nous pouvons avoir les courbes « squelettes » à partir de la recherche des réponses équiphases en tenant compte des modes propres du système linéaire associé .

Pour situer, sur une courbe squelette quelconque, le point représentatif correspondant à une excitation donnée, on peut, par exemple, utiliser la première équation du système (2.33):

$$3 S_{10} \pm S_{20} = -E_1$$

Inversement, connaissant la courbe « squelette » du système et l'excitation E_1 , nous pouvons avoir A_1 et A_2 . Cette courbe squelette est donnée par (2.29) et par le rapport $\frac{A_1}{A_2}$ à la résonance de phase.

B - ETUDE EXPERIMENTALE

La poutre étudiée est constituée de deux barres identiques de section rectangulaire maintenues à une distance d l'une de l'autre à l'aide de fils rigides (corde à piano) collés aux barres à l'araldite et répartis uniformément sur toute la longueur.

Chaque masse est réalisée en deux moitiés fixées chacune sur une barre, un excitateur est vissé sur une partie et un capteur sur l'autre.

Les caractéristiques mécaniques de la poutre sont les suivantes :

$$2 \ell = 1800 \text{ mm}$$

$$\text{section de chaque barre} = 50 \times 5 \text{ mm}^2$$

$$d = 50 \text{ mm}$$

lames d'aluminium : largeur 30mm - épaisseur 1mm

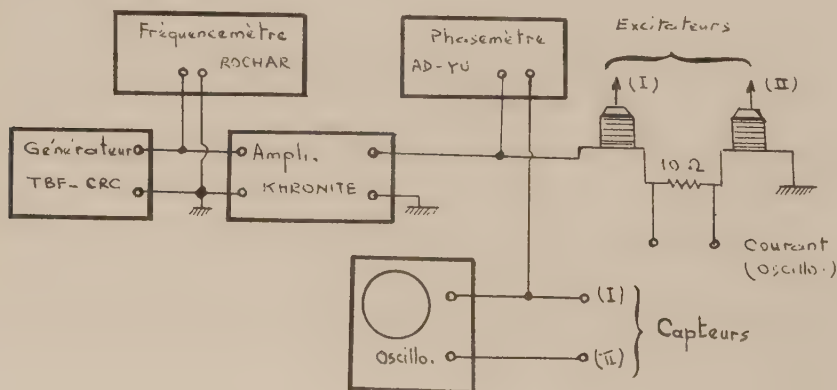
La pression de serrage variable avec le nombre de bracelets de caoutchouc sera prise égale à p pour 16 bracelets répartis tout le long de la poutre ; nous ferons des essais pour un serrage égal à p , $2p$, $3p$ et $4p$.

Comme excitateurs, nous utiliserons deux bobines (PRODERA) donnant chacune une force de 150g/A environ (étalonnage fait à l'aide d'une jauge collée sur une lame flexible). Des essais sont faits en excitant les 2 extrémités libres de la poutre en phase ou en opposition de phase et en excitant une seule extrémité.

Nous avons utilisé des capteurs vitesse : bobines (PRODERA) à grande résistance étalonnées à l'aide d'un comparateur. Nous avons relevé la tension donnée par les capteurs à l'aide d'un oscillographe étant donné que les deux fréquences de résonance sont très faibles et situées entre 2 Hz et 5 Hz.

Les courbes de résonance sont tracées, la poutre étant posée sur la masse du milieu lorsqu'elle vibre suivant le premier mode, et la poutre étant suspendue aux noeuds de vibration lorsqu'elle vibre suivant le deuxième mode. La suspension est réalisée à l'aide de fils de nylon et deux montants fixes.

La chaîne de mesure peut être représentée de la façon suivante :



1°) Valeur de α :

Le tracé d'un cycle complet n'étant pas possible avec le système donné, pour avoir la valeur de α , nous avons tracé les courbes (charge -flèche) d'abord en empêchant le glissement des lames d'aluminium à l'aide d'un serrage très fort, puis en permettant ce glissement ; le rapport des pentes des droites obtenues nous donne la valeur de α ; nous avons trouvé $\alpha = 0,87$ avec une certaine erreur. Dans ce qui suit, nous allons prendre :

$$\alpha \neq 0,9 \quad (\text{graphique II.1})$$

(Le même essai nous permet de calculer la raideur en flexion de la poutre ; nous trouvons ainsi : $EI = 200 \pm 28$ en M. K.S)

2°) Etude au voisinage de la résonance pour $E_2 = 0$

En traçant sur le même graphique les courbes de résonance données par les capteurs aux deux extrémités et pour un seul point d'excitation, nous avons trouvé que les courbes se coupent au point $f = 4,23$ Hz (pour le 2° mode) et nous avons vérifié à l'aide de l'oscillographe que la résonance de phase a lieu pour cette fréquence, donc $A_1 = A_2$ pour $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (Graphique II. 2)

3°) Courbes de résonance :

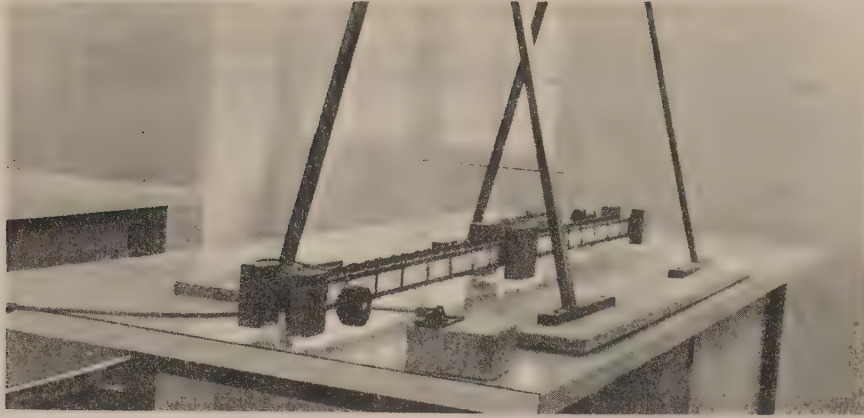
Nous avons tracé les courbes de résonance pour les courants d'excitation 10, 20, 30, 40 et 50 mA et pour des pressions de serrage égales à $p, 2p, 3p, 4p$ (p étant obtenue avec 16 bracelets) pour le premier mode (Graphiques II. 3, 4, 5 et 6) et pour les courants d'excitations 20, 30, 40 et 50 mA et pour les mêmes serrages dans le cas du deuxième mode (Graphiques II. 7, 8, 9 et 10) . D'après ces courbes, nous pouvons connaître les flèches au début du glissement ; la présence du point anguleux qui indique la fin du glissement n'est pas toujours nette et régulière surtout pour le second mode, mais nous pouvons quand même utiliser les valeurs trouvées pour tracer les « courbes squelettes » .

4°) Comparaison des courbes squelettes :

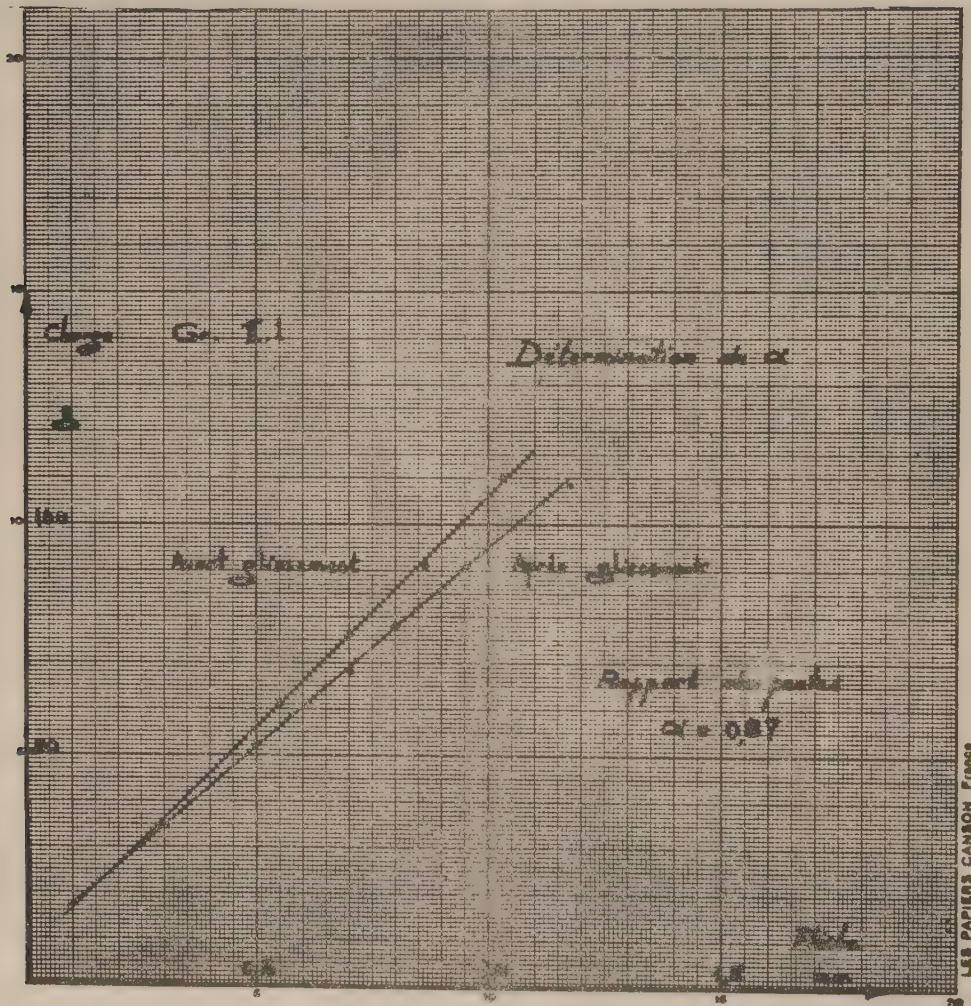
Nous avons tracé les courbes squelettes théoriques d'après les expressions (2.29) pour $\alpha = 0 - 0,2 - 0,4 - 0,6 - \text{et } 0,8$; ces courbes (graphique II.11) ont pour asymptotes $\omega^2 = 4\alpha$ pour le second mode . Les deux familles de courbes se déduisent l'une de l'autre par l'affinité ayant pour axe $\omega^2 = 0$ et de rapport 2 .

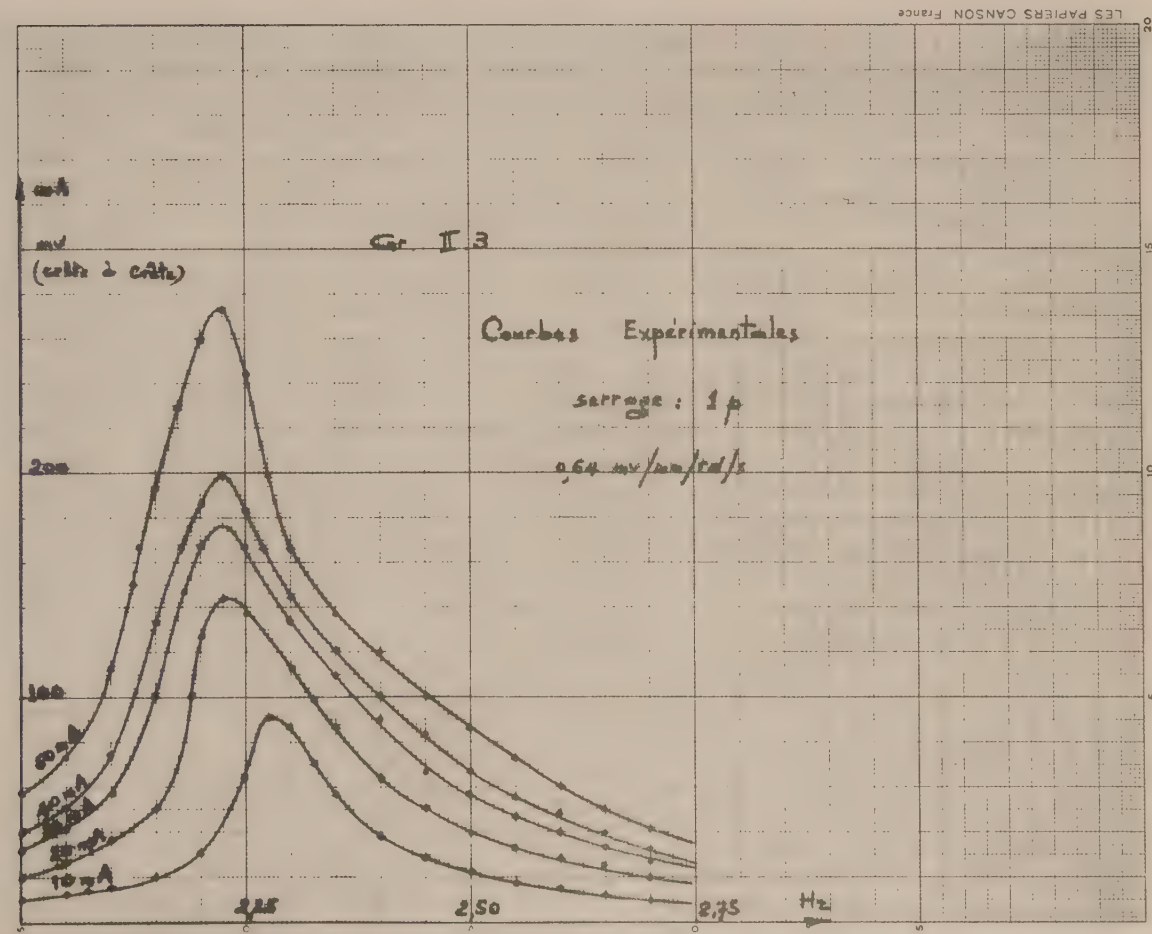
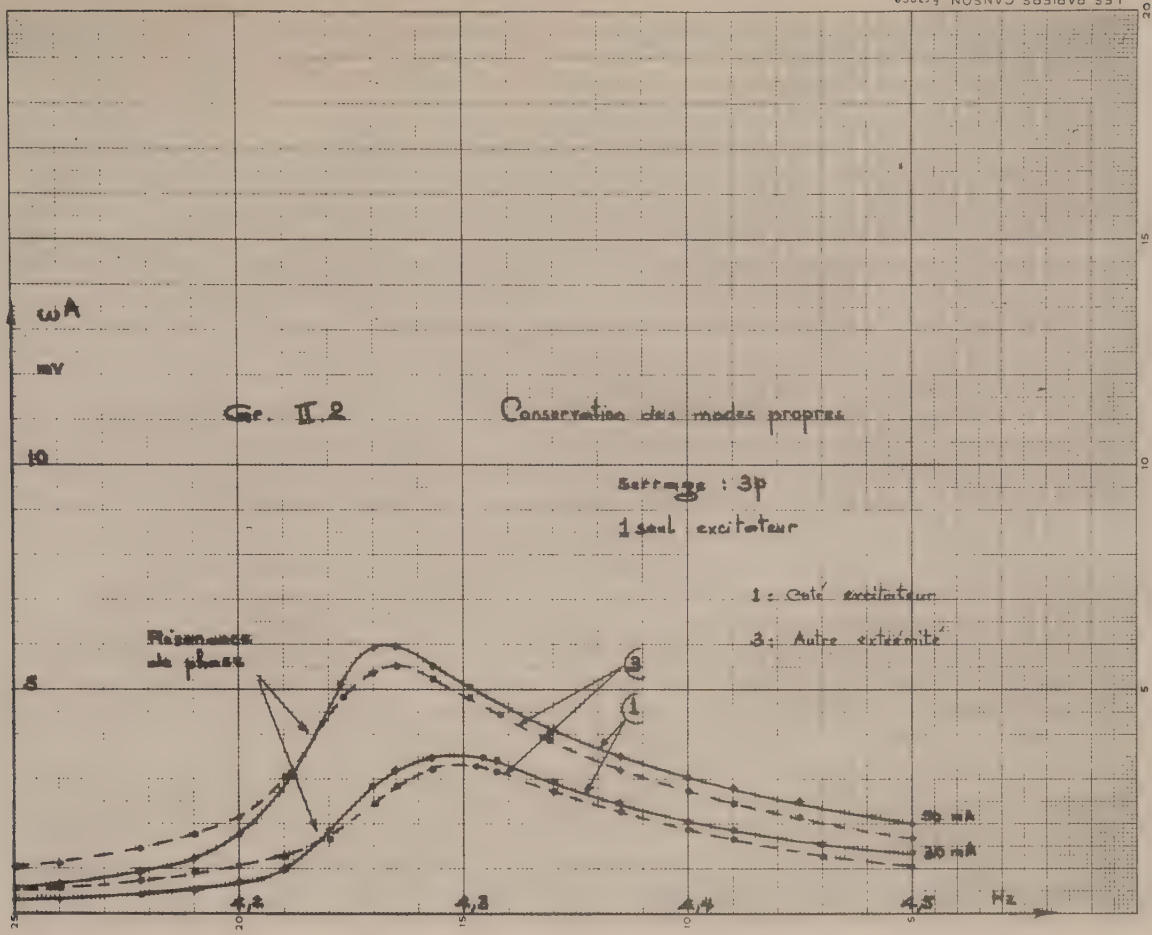
Nous avons tracé, en outre, les courbes de même excitation. Ces courbes (graphique II.12) donnent, dans le cas où le système est excité à l'une des extrémités, la valeur de l'excitation nécessaire pour qu'à la résonance de phase, nous obtenions une amplitude donnée .

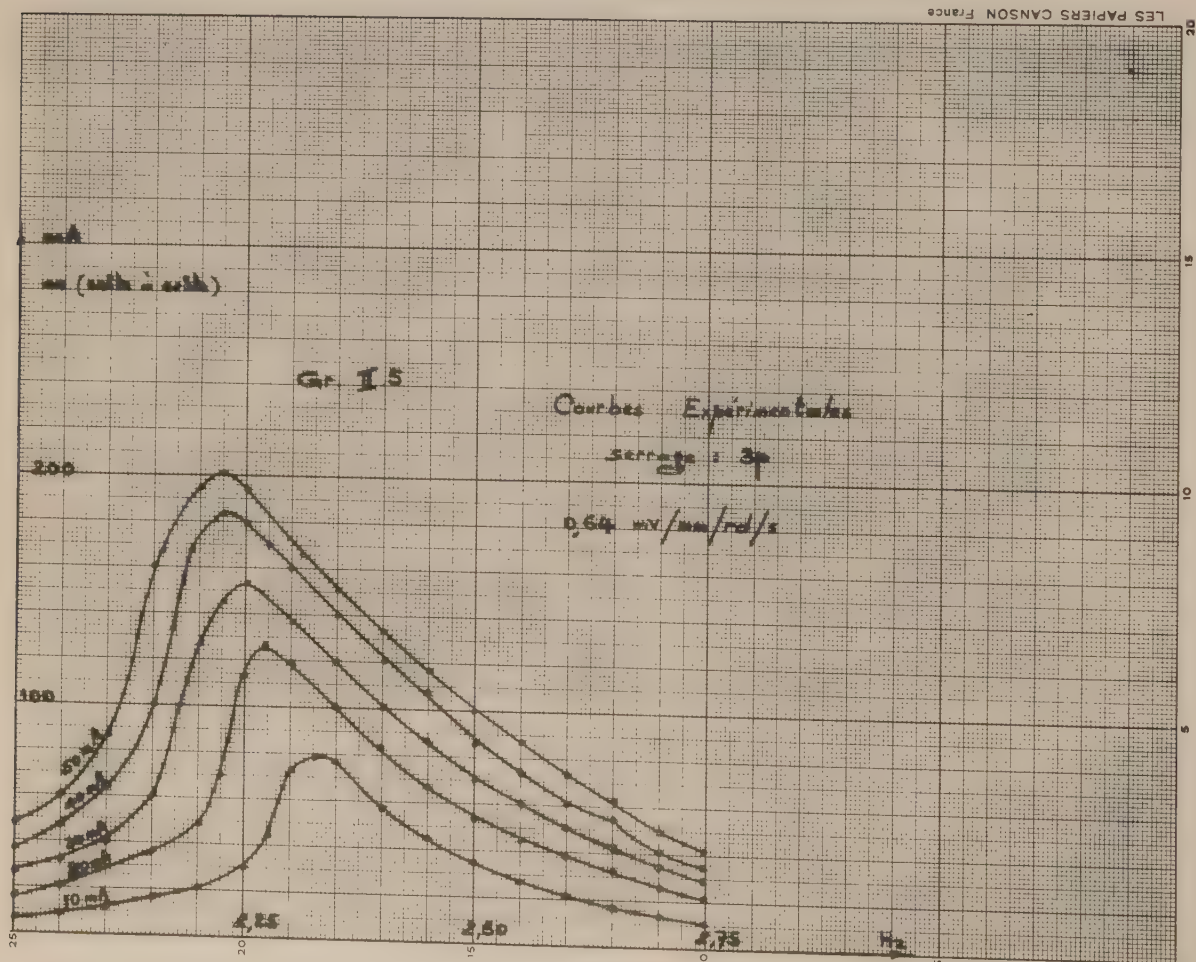
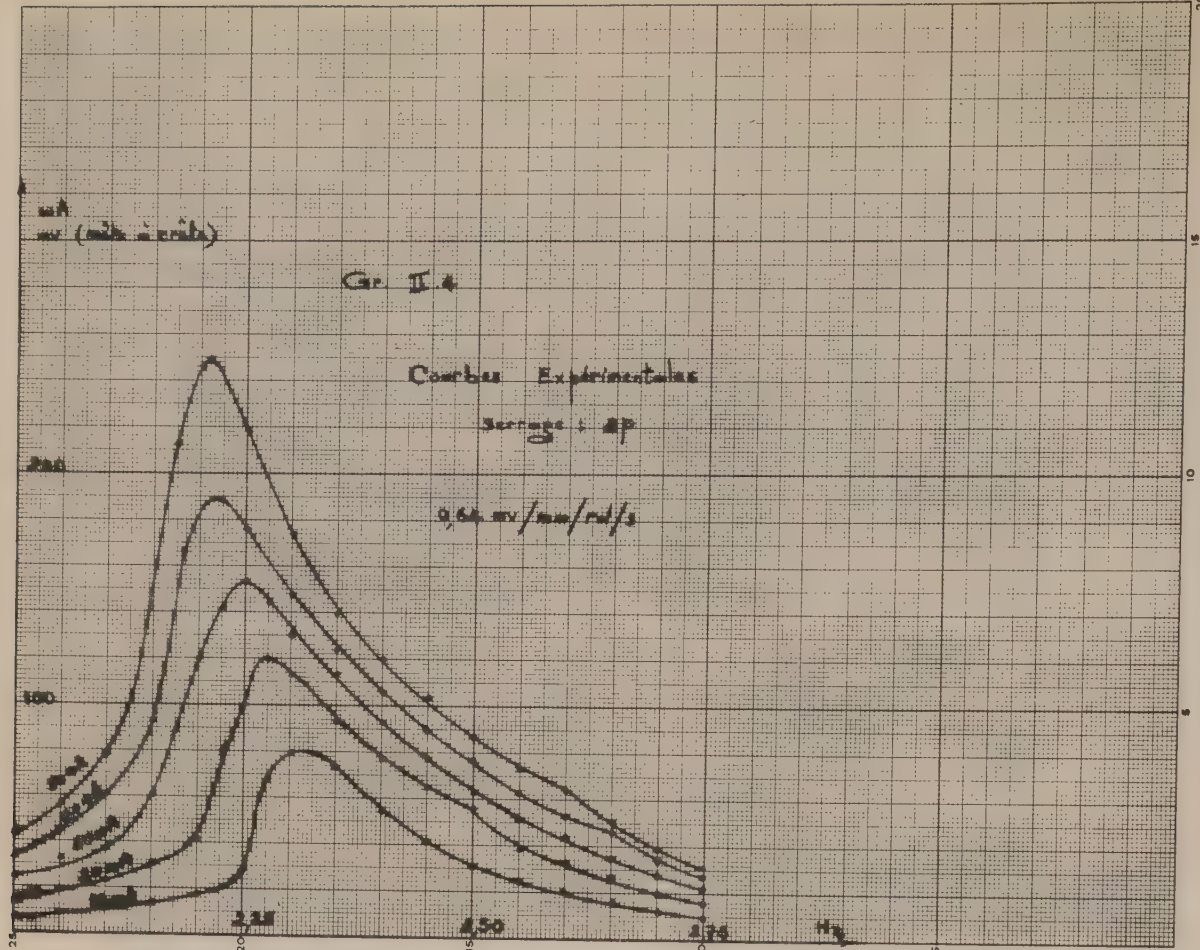
Les courbes « squelettes » expérimentales tracées en coordonnées réduites à partir des courbes de résonance, en supposant que la résonance de phase soit toujours voisine de la résonance d'amplitude, sont assez proches des courbes théoriques tracées pour $\alpha = 0,9$ surtout dans le cas du 1er mode (graphique I. 13) et l'erreur n'est appréciable que pour un serrage = $4p$. Dans le cas du second mode, nous obtenons une bonne approximation pour un serrage = p (graphique II. 14) ; pour les autres serrages, l'écart s'accroît. Nous pouvons expliquer cela par la possibilité de présence d'un glissement partiel seulement et la théorie n'étant valable que si le glissement est total et régulier .

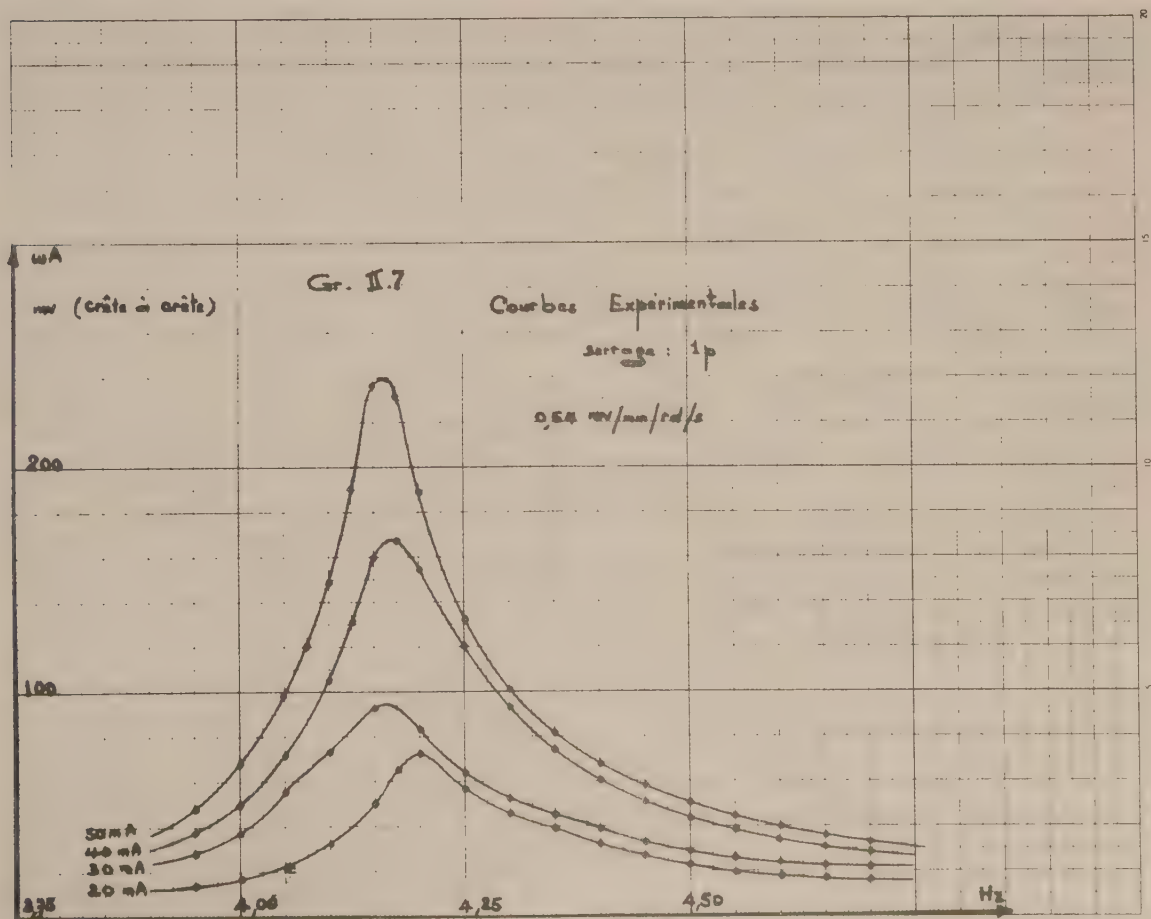
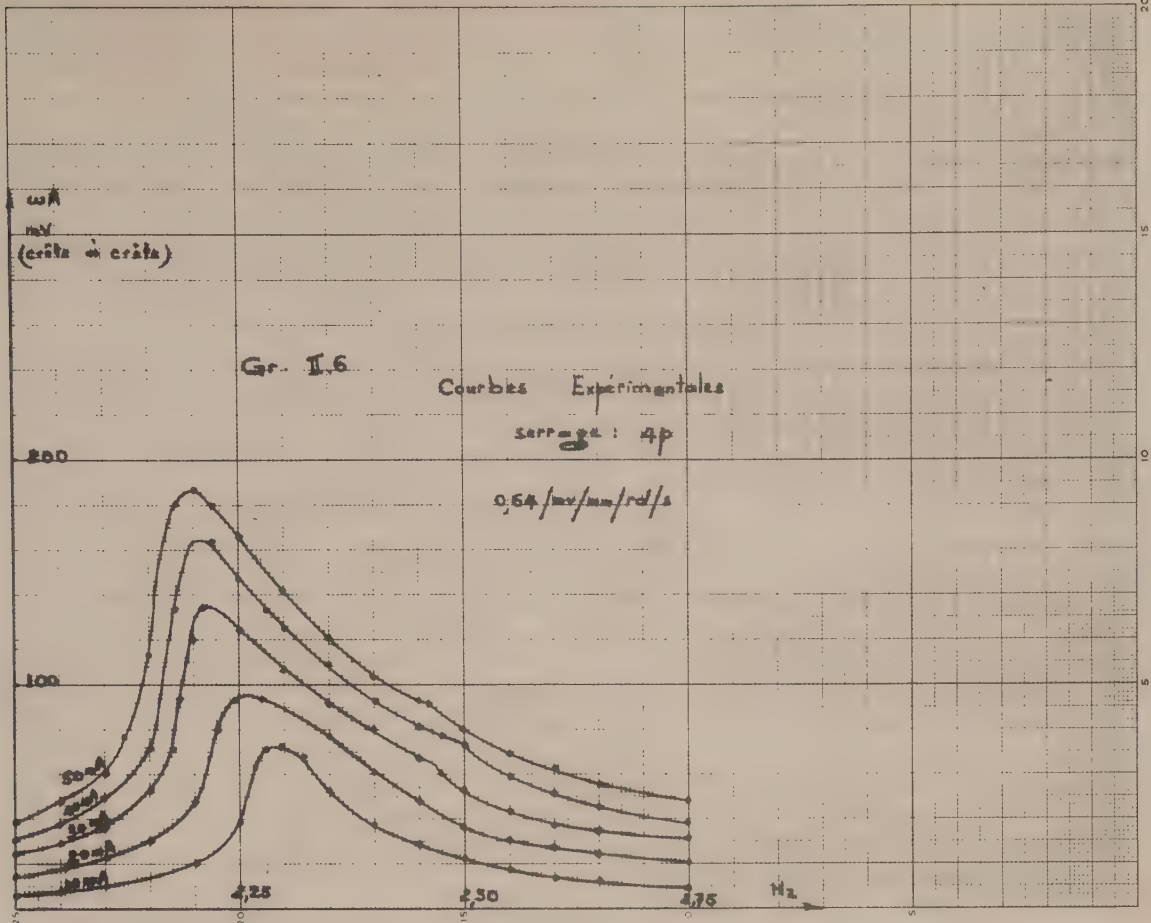


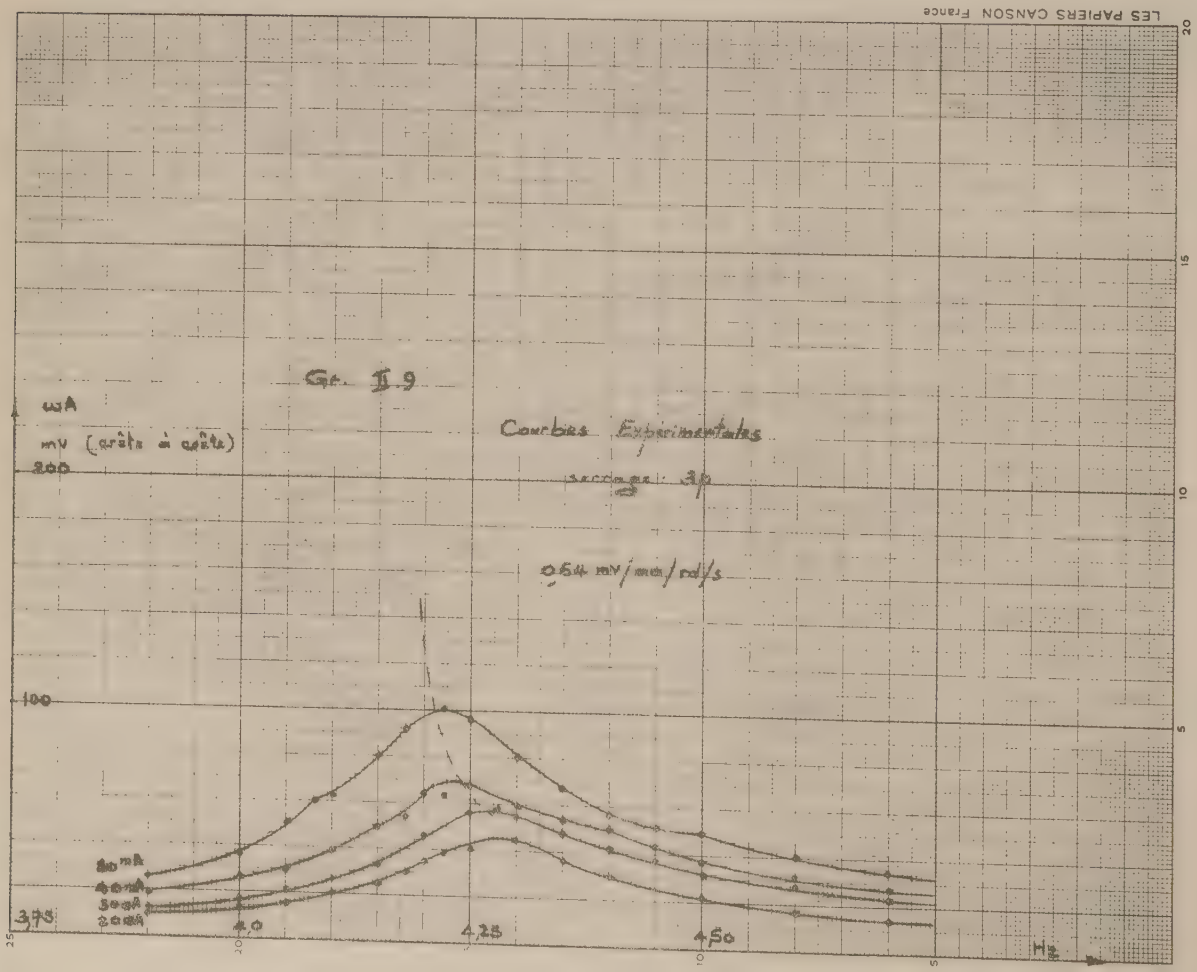
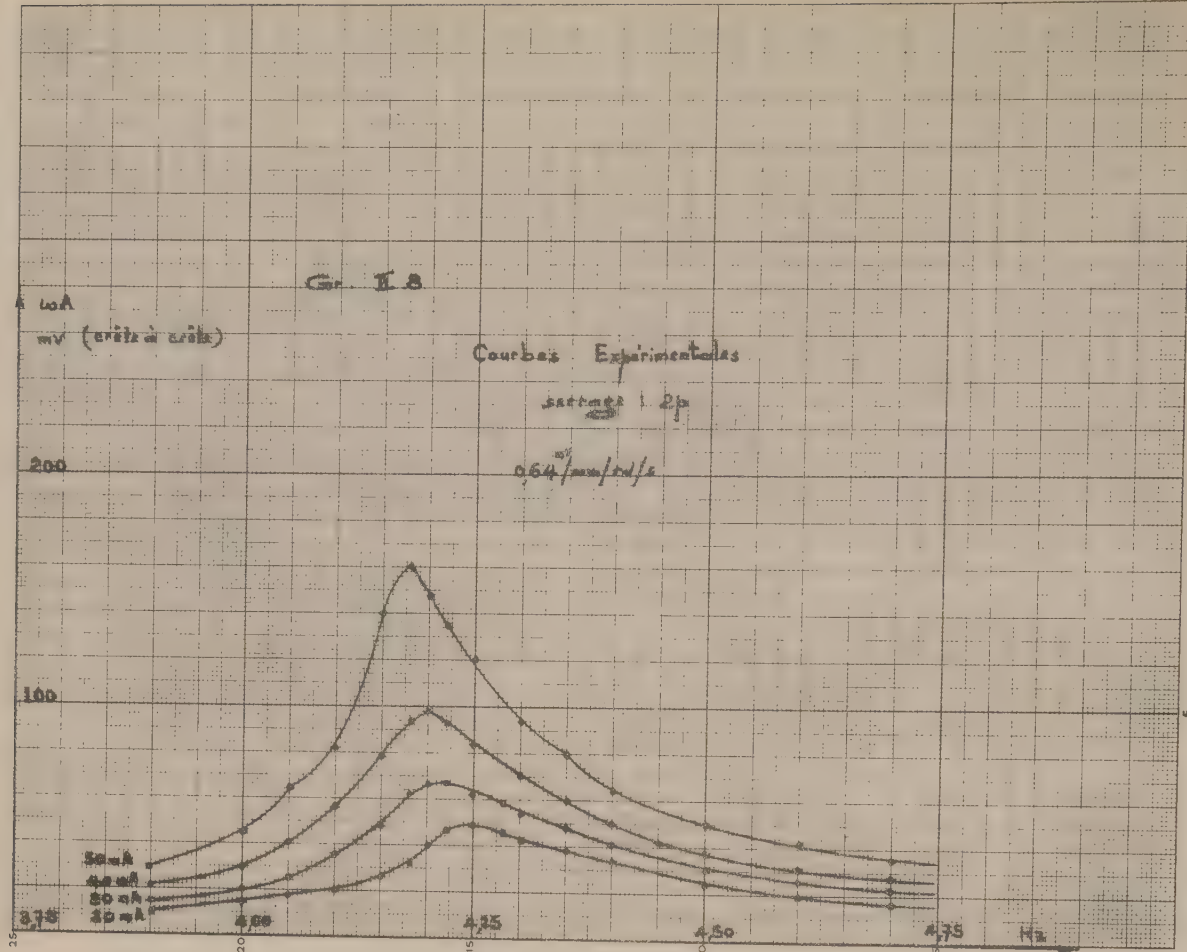
Système suspendu avec un exciteur et un capteur

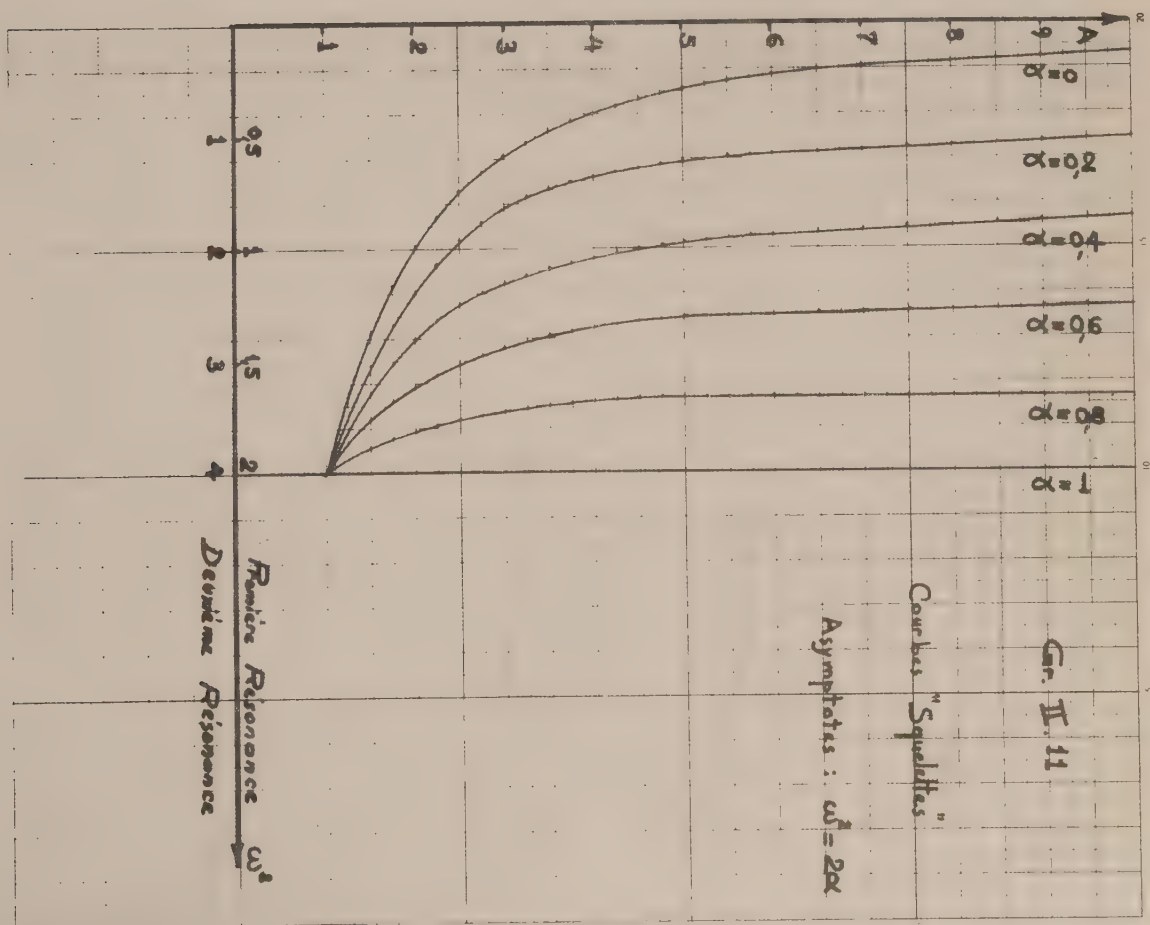
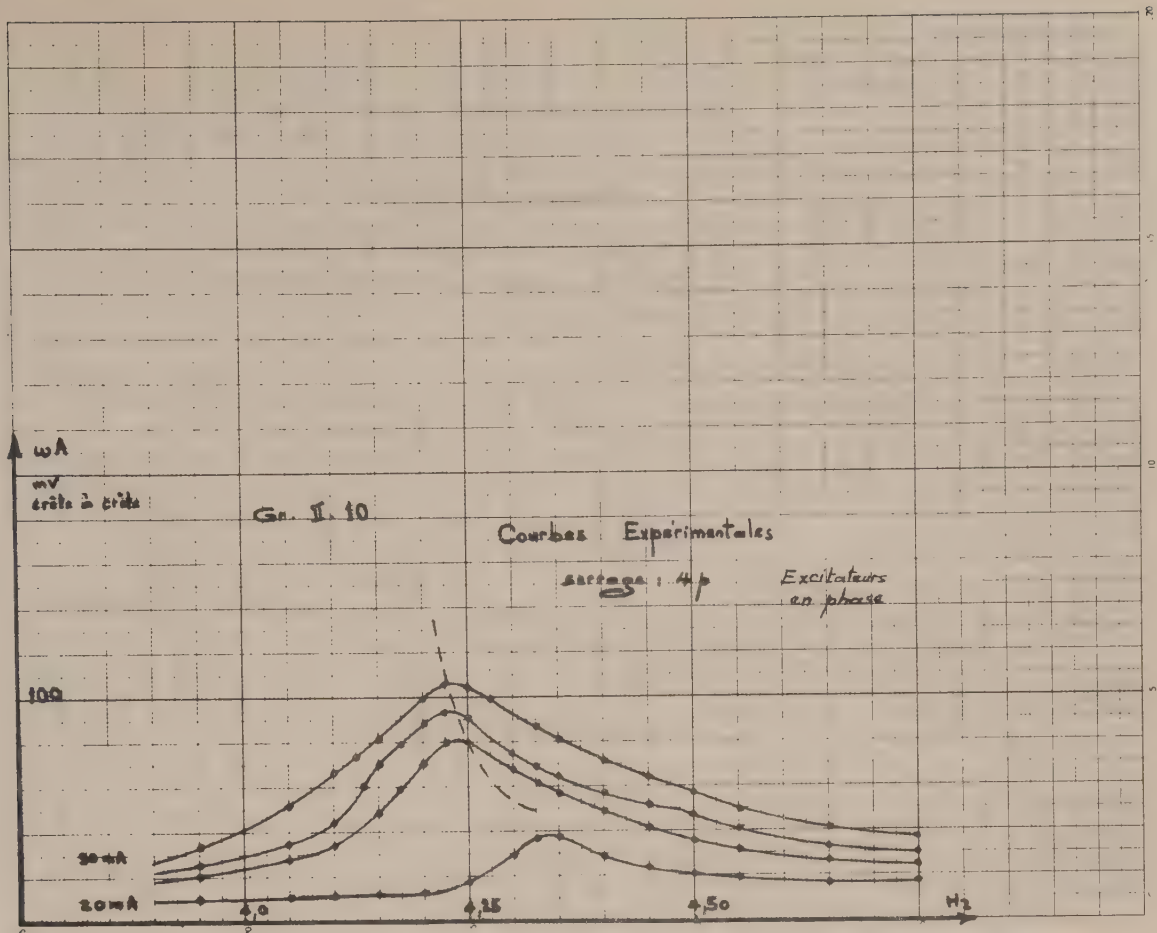


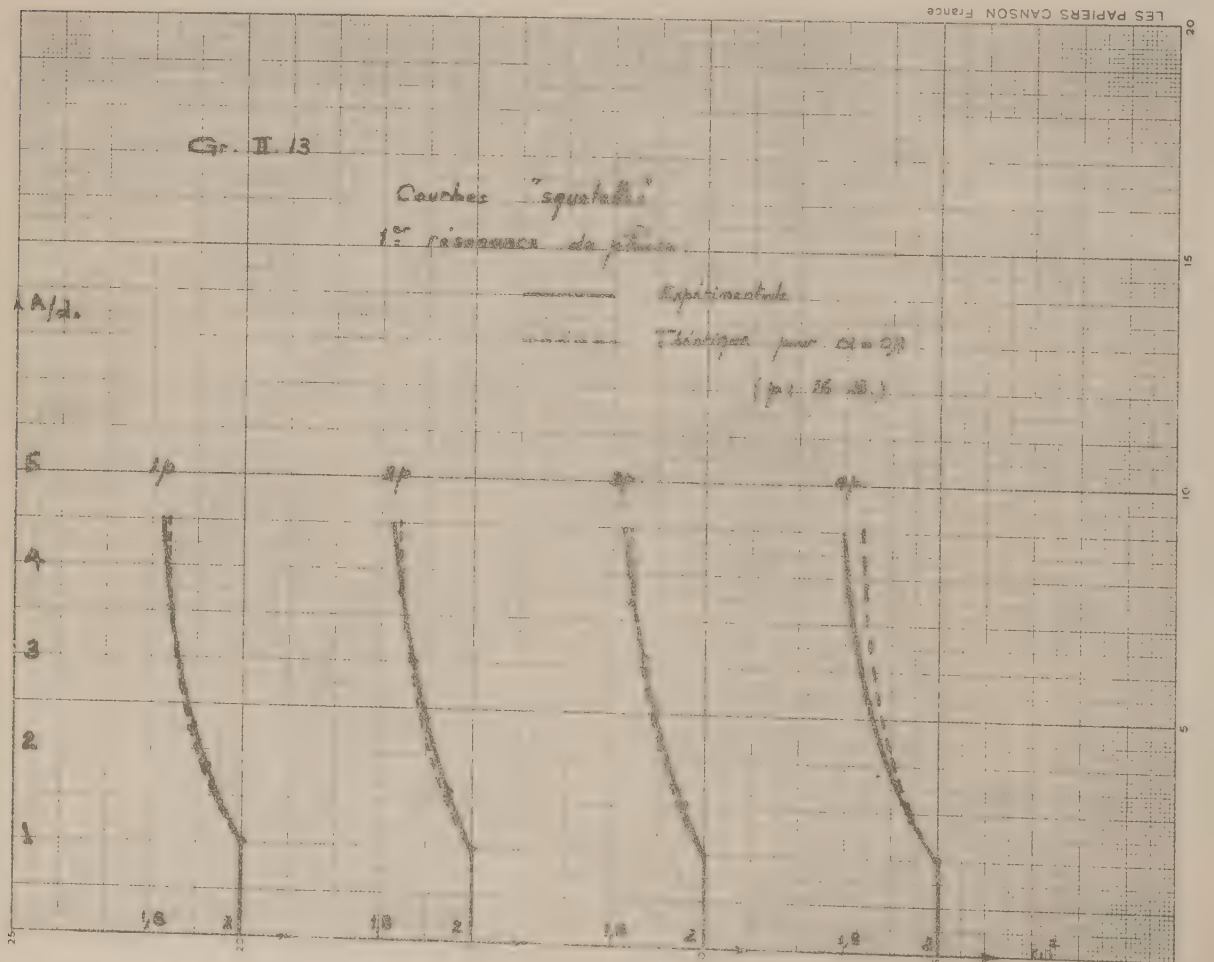
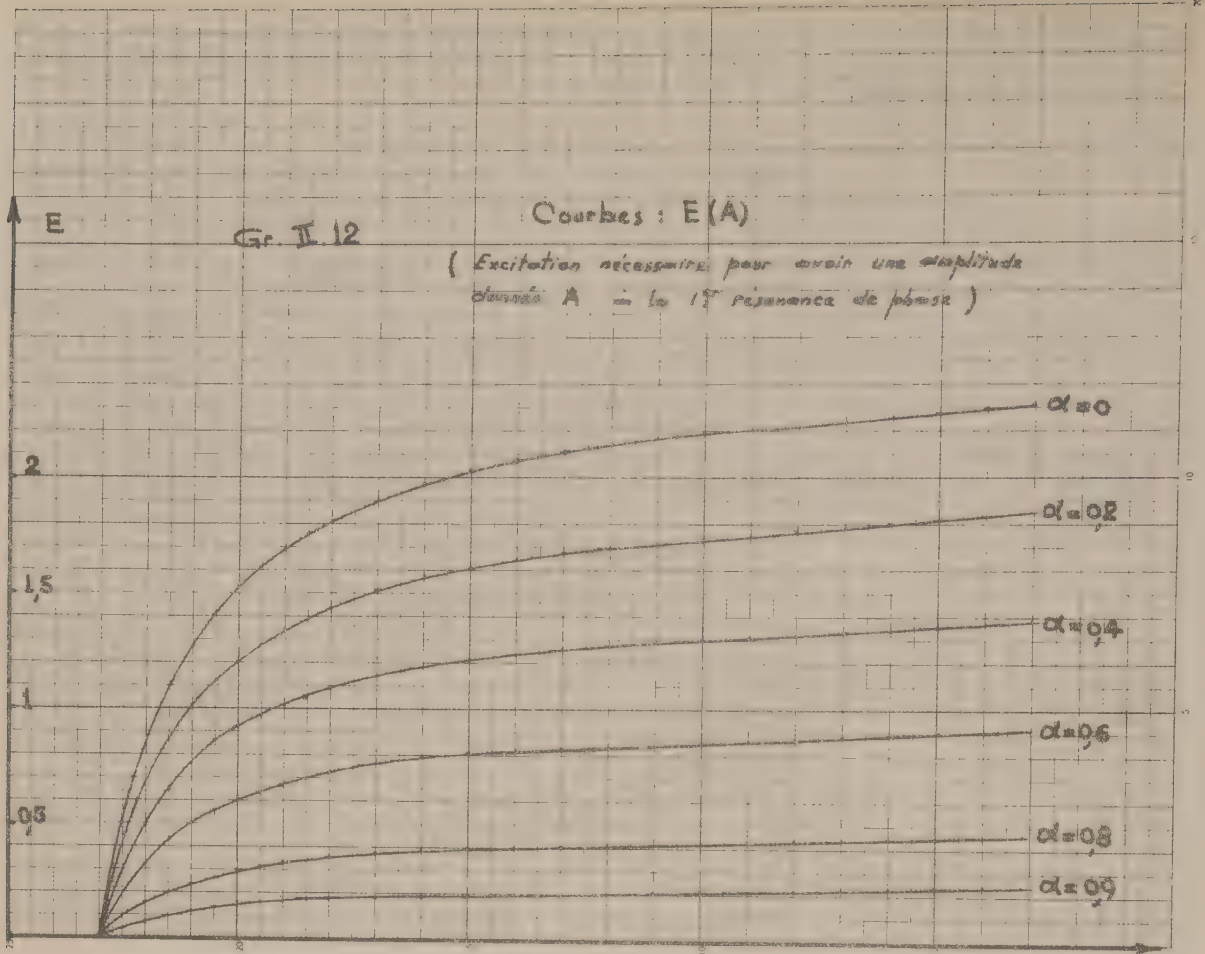






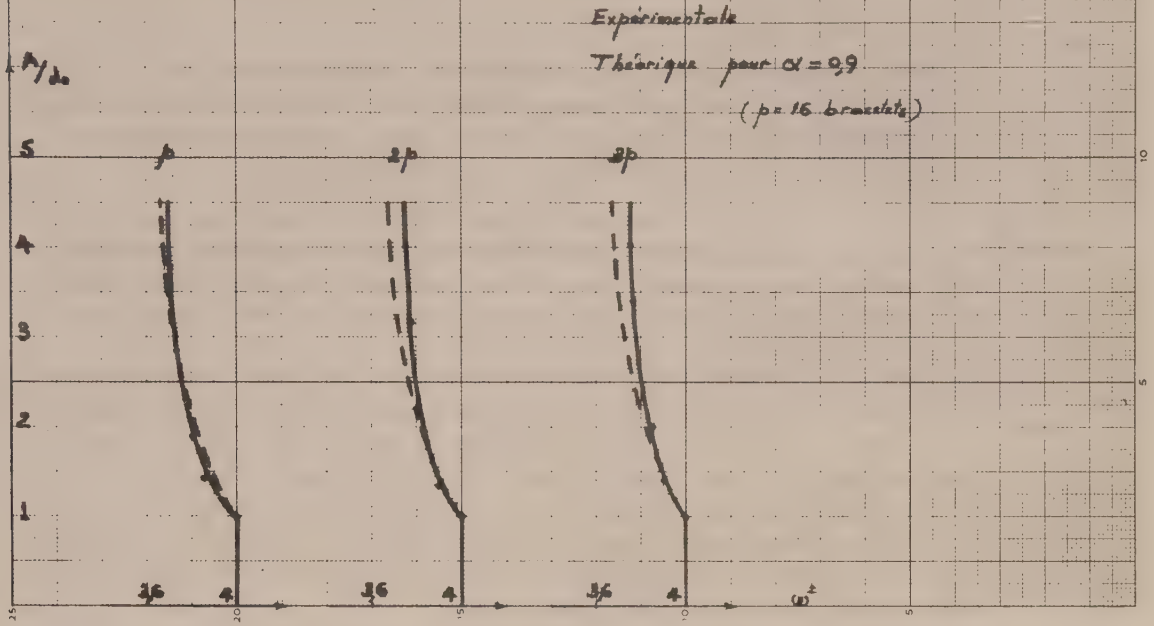






G. II.14

Courbes "squelettes"
2^e résonance de phase



Conclusions du deuxième chapitre :

Nous avons trouvé sans difficultés particulières les équations des courbes « squelettes » et celles des courbes de résonance .

■ Ces résonances sont du type « mou »

■ D'après le calcul fait au voisinage de la résonance, nous avons trouvé que $\omega_r^2 = \alpha(3 \pm 1)$ pour A_i très grande, donc les résonances de phase et les résonances d'amplitude sont confondues théoriquement . Nous ne pouvons pas vérifier ce phénomène expérimentalement car il y a toujours un amortissement visqueux non négligeable.

■ Nous avons trouvé qu'à la résonance (de phase) les modes propres sont les mêmes qu' dans le cas du système linéaire associé et nous avons utilisé cette propriété pour esquisser une nouvelle méthode de calcul qui nous permet de tracer les courbes « squelettes » et de donner, pour une excitation donnée, la valeur de l'amplitude à la résonance de phase correspondante .

La méthode du calcul consiste à rechercher les réponses équiphases; cette recherche nous conduit aux expressions des fréquences de résonance de phase, puis, en tenant compte dans ces expressions, des modes propres du système linéaire associé, nous pouvons tracer la courbe « squelette » ; cette courbe sera graduée en fonction des valeurs de E_1 , données par l'une des équations du mouvement aux réponses équiphases .

L'intérêt de cette méthode se manifeste surtout si nous ne savons pas écrire les équations du mouvement dans le cas général ; c'est le cas du système que nous allons étudier dans le chapitre suivant .

■ Le calcul de $S(A_i)$ et $C(A_i)$ peut se faire facilement à partir du cycle tracé dans le plan (f_i, y_i) . $S(A_i)$ est liée à l'énergie dissipée, donc si la surface du cycle $S(A) = \frac{D}{\pi A}$ et $C(A_i)$ est liée à l'inclinaison de la grande diagonale du cycle . Donc le calcul statique est suffisant pour tracer les courbes de résonance .

■ Dans l'étude expérimentale, nous avons utilisé des capteurs-vitesse et nous avons constaté que la flèche de fin de glissement reste à peu près la même quel que soit le serrage et ne subit que de légères variations, ce qui revient à dire que lorsque l'amplitude (ωA) de la vitesse augmente, le coefficient de frottement μ diminue, ce qui confirme un résultat déjà connu.

÷
÷ ÷
÷

Chapitre Troisième

ETUDE D'UN SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE NON DECOUPLES

INTRODUCTION :

L'étude d'un tel système ne peut pas se faire aussi simplement que les systèmes précédents car nous ne pouvons pas écrire les équations du mouvement dans le cas général. Nous allons nous contenter de tirer seulement quelques résultats et, en particulier, de tracer les courbes « squelettes » en cherchant des réponses équi phases d'après la méthode citée dans le chapitre précédent.

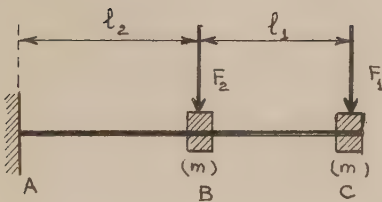
Nous commencerons par faire une étude statique en supposant que les déplacements sont proportionnels; cette étude nous permettra d'écrire les équations du mouvement dans le cas des réponses équi phases.

Description du modèle :

Le système étudié sera schématisé par une poutre formée de deux lames identiques en duralumin (L, b, h) pouvant glisser l'une sur l'autre sous une pression de serrage uniforme variable réglée à l'aide de 64 ressorts identiques comme dans le montage des deux lames du premier chapitre de cette étude.

La poutre ainsi constituée est encastree à une extrémité et libre à l'autre. Elle porte au milieu et à l'extrémité libre des masses identiques (m). Le système est donc assimilé à deux degrés de liberté.

Préliminaire .



Rappelons d'abord les modes propres du système linéaire associé. Nous supposons que la deuxième masse se trouve à une distance $l_2 = 1,214 l_1$ de l'encastrement car dans le système qui sera étudié expérimentalement, la masse ne se trouve pas exactement au milieu, mais nous avons supposé que $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$ pour simplifier les calculs.

Posons :

v_1, y_1 = flèche à l'extrémité respectivement statique et dynamique

v_2, y_2 = flèche au milieu respectivement statique et dynamique .

Nous avons :

Expression de l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{6EI} [(l_1^3 + l_2^3 + 3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2) F_1^2 + (3l_1 l_2^2 + 2l_2^3) F_1 F_2 + l_2^3 F_2^2]$$

avec :

$$v_1 = \frac{F_1(l_1 + l_2)^3}{3EI} + \frac{F_2(3l_2^2 l_1 + 2l_2^3)}{6EI} = \text{flèche en C}$$

$$v_2 = \frac{F_1(3l_2^2 l_1 + 2l_2^3)}{6EI} + \frac{F_2 l_2^3}{3EI} = \text{flèche en B}$$

Connaissant l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)$$

nous pouvons écrire les équations du mouvement, puis calculer les valeurs propres :

$$\lambda_1 = \omega_{10}^2 = 0,118 \frac{K}{m}$$

$$\lambda_2 = \omega_{20}^2 = 4,040 \frac{K}{m} \quad \text{avec } K = \frac{3EI}{L^3}$$

et les vecteurs propres correspondants :

$$\tilde{X}_1 = [1 ; 0,37]$$

qui correspond à un rapport de déplacement : $\alpha_1 = 0,37$

et

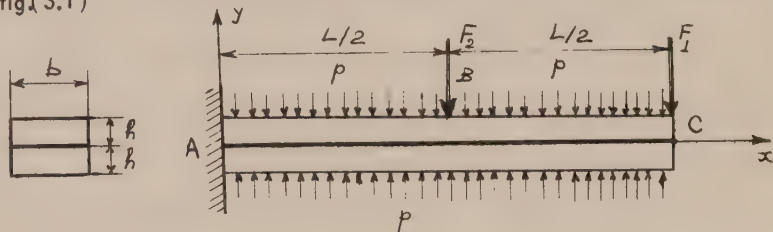
$$\tilde{X}_2 = [1 ; -2,71]$$

qui correspond à un rapport de déplacement : $\alpha_2 = -2,71$

Ces valeurs α_1 et α_2 seront utilisées ultérieurement pour tracer les courbes « squelettes » du système proposé.

Pour le système à étudier, nous supposons donc que les masses se trouvent au milieu et à l'extrémité, comme le montre la fig(3.1)

fig. 3.1



Nous supposons dans l'étude suivante que l'état des contraintes est plan, pour pouvoir écrire les équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

En première partie, une étude statique a été faite en vue de la mise en équation pour l'étude dynamique. L'étude dynamique est celle d'un système non linéaire à deux degrés de liberté dont le découplage est impossible a priori. Nous cherchons des réponses équiphasées en imposant la condition :

$$v_2 = \alpha v_1$$

A - ETUDE STATIQUE

I - Influence du phénomène de glissement sur l'expression du moment fléchissant en un point :

Nous allons chercher l'expression du moment fléchissant dans le cas de deux lames avec une seule charge F concentrée à l'extrémité libre .

1°) Expression de la contrainte tangentielle après glissement dans le cas d'une seule charge à l'extrémité libre :

La contrainte normale suivant y est constante : $\sigma_y = -p$. Le glissement commence lorsque la contrainte tangentielle dans l'interface devient égale à $\mu \sigma_y$, c'est-à-dire lorsque $\tau_{xy} = \mu p$. A ce moment, l'expression de la contrainte tangentielle s'écrit :

$$\tau_{xy} = \mu p + Ay + By^2$$

Cette expression doit, en outre, vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, h) &= 0 \\ \int_0^h \tau_{xy}(L, y) dy &= \frac{F}{2b} \end{aligned}$$

ce qui nous donne les expressions de A et B . D'où finalement :

$$\tau_{xy} = \mu p + \left(-\frac{4\mu p}{h} + \frac{3F}{bh^2}\right)y + \left(\frac{3\mu p}{h^2} - \frac{3F}{bh^3}\right)y^2 \quad (3.2)$$

2°) Expression du moment fléchissant :

Pour calculer l'expression du moment fléchissant, nous allons commencer par calculer la contrainte normale σ_x d'après l'équation d'équilibre (3.1); nous pouvons trouver facilement, en écrivant $\sigma_x(L, y) = 0$:

$$\sigma_x = (x-L) \left[\frac{6F}{bh^3} \left(y - \frac{h}{2}\right) - \frac{6\mu p}{h^2} \left(y - \frac{2h}{3}\right) \right] \quad (3.3)$$

Faisons le changement de variable : $y = Y - \frac{h}{2}$; l'expression du moment fléchissant s'écrit :

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x(y) \cdot Y dS \quad \text{avec} \quad dS = b \cdot dY \quad (3.4)$$

C'est le moment agissant sur l'une des deux lames. Le moment total est le double.

Nous trouvons :

$$M = 2M_1 = (x-L)(F - \mu pbh) \quad (3.5)$$

Donc, dans l'expression du moment fléchissant, tout se passe comme si l'effort tranchant était remplacé par $F - \mu pbh$.

REMARQUE - Connaissant l'expression du moment, nous pouvons calculer facilement la flèche en un point quelconque :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{M_1}{EI_1} \quad I_1 = \text{moment quadratique de la section d'une lame par rapport à son axe neutre.}$$

II - Expressions des forces en fonction des déformations :

Il y a deux cas à distinguer suivant que les deux forces F_1 et F_2 sont dans le même sens ou en sens opposé ou, autrement, suivant que le glissement commence dans la moitié AB ou dans la moitié BC.

1) F_1 et F_2 sont dans le même sens :

Le glissement commence dans la partie AB lorsque l'effort tranchant en B atteint la valeur :

$$F_1 + F_2 = \frac{4}{3} \mu pbh$$

Puis ce glissement devient total pour $F_1 = \frac{4}{3} \mu pbh$. Il y a donc trois phases à distinguer :

a. Avant glissement (Phase 0) :

L'ensemble des deux lames forme une poutre d'inertie constante $I = \frac{2}{3} bh^3$; nous retrouvons donc les expressions classiques des flèches en fonction des charges ou inversement :

$$\begin{cases} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{64}{7} v_1 - \frac{160}{7} v_2 \right) \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{160}{7} v_1 + \frac{512}{7} v_2 \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

b. Glissement partiel (Phase 1)

Le glissement a lieu ici, seulement entre A et B. Le système se comporte donc comme une poutre à inertie variable ; cette inertie est égale à I entre B et C et à $\frac{1}{4}I$ entre A et B, avec :

$$I = \frac{2}{3} bh^3$$

Pour $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ (entre A et B) le moment fléchissant a l'expression suivante :

$$M = (F_2 - \mu pbh)(x - \frac{L}{2}) + F_1(x - L) \quad (3.7)$$

obtenue en remplaçant F_2 par $F_2 - \mu pbh$ à cause du glissement dans AB .

En intégrant l'équation :

$$E \frac{bh^3}{6} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M$$

nous pouvons avoir l'expression de $v(\frac{L}{2}) = v_2$

Pour $\frac{L}{2} \leq x \leq L$, on a :

$$M = F_1(x - L)$$

En intégrant $E \cdot \frac{2bh^3}{3} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M$ et en exprimant la continuité de la poutre en B ,

nous pouvons avoir l'expression de $v(L) = v_1$.

Nous aboutissons finalement aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{L^3}{2Ebh^3} \left(\frac{7}{2} F_1 + F_2 - \mu pbh \right) \\ v_2 = \frac{L^3}{4Ebh^3} \left(\frac{5}{2} F_1 + F_2 - \mu pbh \right) \end{cases} \quad (3.8)$$

qui peuvent encore s'écrire :

$$\begin{cases} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} (2v_1 - 4v_2) \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} (-5v_1 + 14v_2) + \mu pbh \end{cases} \quad (3.9)$$

c . Glissement total : (Phase 2)

Le glissement total a lieu pour $F_1 \geq \frac{4}{3} \mu pbh$.

Dans ce cas le système se comporte comme une poutre à inertie constante égale à $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad M &= F_2(x - \frac{L}{2}) + (F_1 - \mu pbh)(x - L) \\ \text{Pour } \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad M &= (F_1 - \mu pbh)(x - L) \end{aligned} \quad (3.10)$$

En intégrant l'équation $E \frac{bh^3}{6} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M$, nous pouvons avoir les expressions des flèches v_1 et v_2 en fonction de F_1 et F_2 :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{L^3}{Ebh^3} [2(F_1 - \mu pbh) + 5/8 F_2] \\ v_2 &= \frac{L^3}{Ebh^3} [\frac{5}{8}(F_1 - \mu pbh) + \frac{F_2}{4}] \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou inversement :

$$\begin{cases} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{16}{7} v_1 - \frac{40}{7} v_2 \right) + \mu pbh \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{40}{7} v_1 + \frac{128}{7} v_2 \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

2) F_1 et F_2 ont des sens opposés :

Si les charges F_1 et F_2 ont des sens opposés, deux cas peuvent se présenter :

Si $|F_1| < |F_1 + F_2|$, le glissement commence entre A et B lorsque :

$$|F_1 + F_2| = \frac{4}{3} |\mu pbh|$$

et on retrouve le cas précédent .

Si $|F_1| > |F_1 + F_2|$, le glissement commence entre B et C . C'est ce cas que nous allons considérer maintenant .

a) Avant glissement : (Phase 0)

$$\frac{4}{3} |\mu pbh| > |F_1| > |F_1 + F_2|$$

On retrouve les mêmes résultats que dans la (phase 0) du cas précédent .

b) Glissement partiel : (Phase 1)

$$|F_1 + F_2| < \frac{4}{3} |\mu pbh| < |F_1|$$

Le glissement a lieu seulement entre B et C . Le système se comporte comme une poutre à inertie variable. Cette inertie est égale à I entre A et B et à $\frac{I}{4}$ entre B et C .

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad M = (x-L)(F_1 - \mu pbh) + (x - \frac{L}{2})F_2 \quad (3.13)$$

En intégrant l'équation $E \cdot \frac{2bh^3}{3} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M$, nous pouvons avoir l'expression de $v_2 = v(\frac{L}{2})$.

$$\text{Pour } \frac{L}{2} \leq x \leq L : \quad M = (F_1 - \mu pbh)(x-L) \quad (3.14)$$

En intégrant l'équation $E \cdot \frac{bh^3}{6} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M$, et en exprimant la continuité de la poutre en B, nous pouvons avoir l'expression de $v_1 = v(L)$.

Nous aurons finalement les expressions suivantes :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{L^3}{Ebh^3} \left[\frac{3}{4} (F_1 - \mu pbh) + \frac{5}{32} F_2 \right] \\ v_2 = \frac{L^3}{Ebh^3} \left[\frac{5}{32} (F_1 - \mu pbh) + \frac{1}{16} F_2 \right] \end{cases} \quad (3.15)$$

qui peuvent encore s'écrire :

$$\begin{cases} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{64}{23} v_1 - \frac{160}{23} v_2 \right) + \mu pbh \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{160}{23} v_1 + \frac{768}{23} v_2 \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

c) Glissement total (phase 2)

$$|F_1| > |F_1 + F_2| > \frac{4}{3} |\mu pbh|$$

On retrouve les mêmes résultats que dans la (Phase 2) du cas précédent (F_1 et F_2 ont même sens) .

3) Récapitulation des résultats :

Posons $v_2 = \alpha v_1$, d'où :

F_1 et F_2 sont dans le même sens (même signe) :

$$(0) \begin{cases} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{64}{7} - \frac{160\alpha}{7} \right) v_1 = k_1 v_1 \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{160}{7\alpha} + \frac{512}{7} \right) v_2 = k_2 v_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$(1) \begin{cases} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} (2 - 4\alpha) v_1 = k_1' v_1 \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{5}{\alpha} + 14 \right) v_2 + \mu pbh = k_2' v_2 + \mu pbh \end{cases} \quad (3.18)$$

$$(2) \begin{cases} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{16}{7} - \frac{40}{7}\alpha \right) v_1 + \mu pbh = \frac{k_1}{4} v_1 + \mu pbh \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{40}{7\alpha} + \frac{128}{7} \right) v_2 = \frac{k_2}{4} v_2 \end{cases} \quad (3.19)$$

F_1 et F_2 ont des sens opposés et $|F_1| > |F_1 + F_2|$:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{64}{7} - \frac{160\alpha}{7} \right) v_1 = k_1 v_1 \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{160}{7\alpha} + \frac{512}{7} \right) v_2 = k_2 v_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{64}{23} - \frac{160\alpha}{23} \right) v_1 + \mu pbh = k_1'' v_1 + \mu pbh \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{160}{23\alpha} + \frac{768}{23} \right) v_2 = k_2'' v_2 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(\frac{16}{7} - \frac{40\alpha}{7} \right) v_1 + \mu pbh = \frac{k_1}{4} v_1 + \mu pbh \\ F_2 = \frac{Ebh^3}{L^3} \left(-\frac{40}{7\alpha} + \frac{128}{7} \right) v_2 = \frac{k_2}{4} v_2 \end{array} \right.$$

III - Diagrammes théoriques dans les plans (F_i, v_i) : $i=1,2$

Normalement, les diagrammes $\mathcal{D}_i(F_i, v_i)$ sont représentés par les équations (3.17, 18, 19 et 20). Ces diagrammes présentent des discontinuités; nous allons les remplacer par des diagrammes théoriques $\mathcal{D}_{it}$ et $\mathcal{G}_i$, tels que : $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{it} + \mathcal{G}_i \dots$ $\mathcal{D}_{it}$ étant un diagramme continu en F_i et v_i formé de trois segments de droites ayant mêmes pentes que dans le diagramme réel et $\mathcal{G}_i$ un diagramme formé de trois segments horizontaux, et qui représente simplement les valeurs des discontinuités dans le diagramme réel. Ici, ce sont les diagrammes $\mathcal{D}_{it}$ que nous allons déterminer.

1) F_1 et F_2 sont dans le même sens :

a - Etude dans le plan F_1, v_1

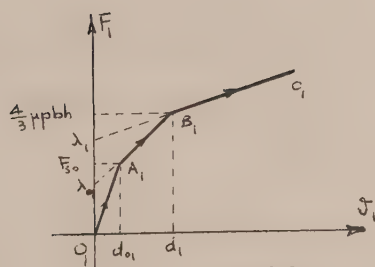


fig. 3.2

Equations des différents segments :

$$O_1 A_1 : F_1 = k_1 v_1$$

$$A_1 B_1 : F_1 = k_1' v_1 + \lambda_{01}$$

$$B_1 C_1 : F_1 = \frac{k_1}{4} v_1 + \lambda_1$$

En exprimant que l'abscisse de A_1 (commun à $O_1 A_1$ et $A_1 B_1$) est d_{01} , que l'abscisse de B_1 (commun à $A_1 B_1$ et $B_1 C_1$) est d_1 et en écrivant

que l'ordonnée de B_1 est $\frac{4}{3} \mu p b h$, on aboutit aux trois équations suivantes :

$$d_{01} = \frac{\lambda_{01}}{k_1 - k_1'} \quad (3.21)$$

$$d_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_{01}}{k_1' - \frac{k_1}{4}} \quad (3.22)$$

$$\lambda_1 = \frac{4 \mu p b h}{3} \left(1 - \frac{k_1}{4 k_1'}\right) + \lambda_{01} \frac{k_1}{4 k_1'} \quad (3.23)$$

trois équations à 4 inconnues : d_{01} , d_1 , λ_{01} et λ_1 .

b) Etude dans le plan (F_2, v_2)

Equations des différents segments :

$$O_2 A_2 : F_2 = k_2 v_2$$

$$A_2 B_2 : F_2 = k_2' v_2 + \lambda_{02}$$

$$B_2 C_2 : F_2 = \frac{k_2}{4} v_2 + \lambda_2$$

Si le glissement partiel commence pour :

$$F_1 = F_{s0} \text{ et } F_2 = F_{s0}'$$

nous pouvons écrire :

$$F_{s0} + F_{s0}' = \frac{4}{3} \mu p b h \quad (3.24)$$

$$\text{avec } F_{s0} = k_1 d_{01} \quad F_{s0}' = k_2 d_{02} \quad (3.25)$$

D'autre part, comme $v_2 = \alpha v_1$, nous avons :

$$d_{02} = \alpha d_{01} \quad \text{et} \quad d_2 = \alpha d_1 \quad (3.26)$$

Les six équations précédentes (3.21 -26) nous permettent de calculer :

$$d_{01}, d_1, \lambda_{01}, \lambda_1, d_{02} \text{ et } d_2$$

Pour avoir les expressions de λ_{02} et λ_2 , nous exprimons que l'abscisse de A_2 (se trouvant à la fois sur $O_2 A_2$ et $A_2 B_2$) est d_{02} et que l'abscisse de B_2 (se trouvant à la fois sur $A_2 B_2$ et $B_2 C_2$) est d_2 .

Nous aboutissons finalement aux résultats suivants :

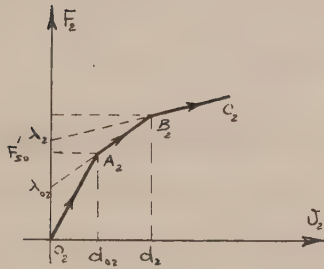


fig. 3.3

dans le plan $F_1 v_1$

$$\begin{aligned}
 d_{01} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu p b h}{k_1 + \alpha k_2} \\
 \lambda_{01} &= \frac{4}{3} \mu p b h \cdot \frac{k_1 - k_1'}{k_1 + \alpha k_2} \\
 \lambda_1 &= \frac{4}{3} \mu p b h \cdot \left[1 - \frac{k_1}{4 k_1'} \cdot \frac{k_1' + \alpha k_2}{k_1 + \alpha k_2} \right] \\
 d_1 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu p b h}{k_1'} \cdot \frac{k_1' + \alpha k_2}{k_1 + \alpha k_2}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

et dans le plan F_2, v_2

$$\begin{aligned}
 d_{02} &= \frac{4}{3} \alpha \frac{\mu p b h}{k_1 + \alpha k_2} \\
 \lambda_{02} &= \frac{4}{3} \alpha \mu p b h \cdot \frac{k_2 - k_2'}{k_1 + \alpha k_2} \\
 \lambda_2 &= \frac{4}{3} \alpha \mu p b h \left[\frac{1}{k_1'} (k_2' - \frac{k_2}{4}) + \frac{k_2 - k_2'}{k_1 + \alpha k_2} \right] \\
 d_2 &= \frac{4}{3} \alpha \frac{\mu p b h}{k_1'} \cdot \frac{k_1' + \alpha k_2}{k_1 + \alpha k_2}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

2) F_1 et F_2 ont des sens opposés et $|F_1| > |F_1 + F_2|$

a. Etude dans le plan (F_1, v_1) :

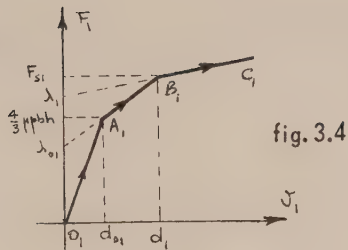


fig. 3.4

Equations des différents segments :

$$\begin{aligned}
 O_1 A_1 &: F_1 = k_1 v_1 \\
 A_1 B_1 &: F_1 = k_1'' v_1 + \lambda_{01} \\
 B_1 C_1 &: F_1 = \frac{k_1}{4} v_1 + \lambda_1
 \end{aligned}$$

Nous exprimons que l'abscisse de A_1 (se trouvant à la fois sur $O_1 A_1$ et sur $A_1 B_1$) est d_{01} , l'abscisse de B_1 (se trouvant à la fois sur $A_1 B_1$ et sur $B_1 C_1$) est d_1 . Nous écrivons, en outre, que

l'ordonnée de A_1 est $\frac{4}{3} \mu p b h$, ce qui nous conduit aux trois équations suivantes :

$$d_{01} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu p b h}{k_1} = \frac{\lambda_{01}}{k_1 - k_1''} \tag{3.29}$$

$$\lambda_1 = \left(k_1'' - \frac{k_1}{4} \right) d_1 \tag{3.30}$$

trois équations à 4 inconnues : d_{01} , d_1 , λ_{01} et λ_1 .

b. Etude dans le plan (F_2, v_2) :

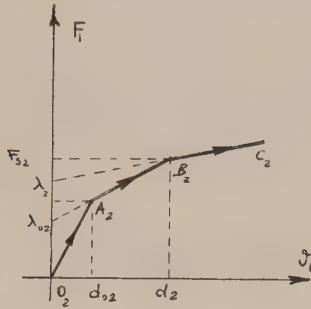


fig. 3.5

Equations des différents segments :

$$O_2 A_2 : F_2 = k_2 v_2$$

$$A_2 B_2 : F_2 = k_2'' v_2 + \lambda_{02}$$

$$B_2 C_2 : F_2 = \frac{k_2}{4} v_2 + \lambda_2$$

Si le glissement total commen ce pour

$$F_1 = F_{s1} \text{ et } F_2 = F_{s2}$$

nous pouvons écrire en B_2

$$|F_{s1} + F_{s2}| = \frac{4}{3} |\mu p b h|$$

D'autre part, comme $v_2 = \alpha v_1$, nous avons :

$$d_{02} = \alpha d_{01} \text{ et } d_2 = \alpha d_1$$

Nous obtenons deux autres équations en écrivant que l'abscisse de A_2 (commun à $O_2 A_2$ et à $A_2 B_2$) est d_{02} et que l'abscisse de B_2 (commun à $A_2 B_2$ et à $B_2 C_2$) est d_2 .

Ce qui nous donne finalement les résultats suivants :

Dans le plan F_1, v_1 :

$$\begin{aligned} d_{01} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu p b h}{k_1} \\ \lambda_{01} &= \frac{4}{3} \mu p b h \cdot \alpha \cdot \frac{k_1 - k_1''}{k_1} \\ \lambda_1 &= \frac{4}{3} \mu p b h \cdot \left[\frac{3}{4} - \frac{\alpha k_2 (k_1'' - \frac{k_1}{4})}{k_1 (\alpha k_2'' + k_1'')} \right] \\ d_1 &= \frac{4}{3} \mu p b h \left[\frac{1}{k_1} - \frac{\alpha k_2}{k_1 (\alpha k_2'' + k_1'')} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dans le plan F_2, v_2 :

$$\begin{aligned} d_{02} &= \frac{4}{3} \alpha \cdot \frac{\mu p b h}{k_1} \\ \lambda_{02} &= \frac{4}{3} \mu p b h \cdot \alpha \cdot \frac{k_2 - k_2''}{k_1} \\ \lambda_2 &= \frac{4}{3} \mu p b h \cdot \alpha \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1} - \frac{\alpha k_2 (k_2'' - \frac{k_2}{4})}{k_1 (k_1'' + \alpha k_2'')} \right] \\ d_2 &= \frac{4}{3} \mu p b h \cdot \alpha \left[\frac{1}{k_1} - \frac{\alpha k_2}{k_1 (\alpha k_2'' + k_1'')} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les diagrammes étant ainsi déterminés dans les deux cas : F_1 et F_2 sont de même signe ou de signes opposés ; en calcul dynamique, nous considérons tout simplement d_{oi} , λ_{oi} , λ_i et d_i sans s'occuper des signes relatifs de F_1 et F_2 .

Par comparaison des équations des différents segments des diagrammes avec les expressions (3.17, 18, 19 et 20), nous pouvons déterminer les diagrammes $\mathcal{C}_i$.

Dans le plan F_1, v_1 :

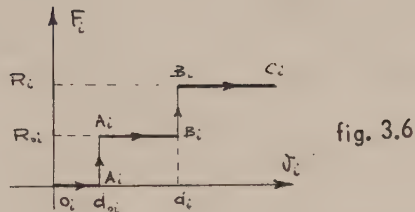


fig. 3.6

$$O_1 A_1 : F_1 = 0 \quad (\text{avant glissement})$$

$$A_1 B_1 : F_1 = -\lambda_{01} = R'_{01} \quad (\text{glissement partiel}) \quad (3.33)$$

$$B_1 C_1 : F_1 = \mu p b h - \lambda_1 = R'_1 \quad (\text{glissement total})$$

Dans le plan F_2, v_2

$$O_2 A_2 : F_2 = 0 \quad (\text{avant glissement})$$

$$A_2 B_2 : F_2 = \mu p b h - \lambda_{02} = R'_{02} \quad (\text{glissement partiel}) \quad (3.34)$$

$$B_2 C_2 : F_2 = -\lambda_2 = R'_2 \quad (\text{glissement total})$$

ou en abrégé :

$$\mathcal{C}_i = \begin{cases} 0 \\ R'_{oi} \\ R'_i \end{cases} \quad (3.35)$$

dans le plan F_i, v_i

R'_{oi} et R'_i sont respectivement égales à R'_{oi} et R'_i si F_1 et F_2 sont dans le même sens et à R''_{oi} et R''_i si F_1 et F_2 sont de signes opposés avec $|F_1| < |F_1 + F_2|$

B - ETUDE DYNAMIQUE

Les diagrammes $\mathcal{D}_{1f}$ déterminés précédemment nous permettent de faire apparaître des cycles fermés lorsque les charges F_1 et F_2 seront remplacées par des forces cycliques (ici sinusoïdales) car, si à partir du point C_i la charge décroît, le coefficient de frottement change de signe et le glissement disparaît pour apparaître de nouveau au point D_i d'abscisse $A_i - 2d_{oi}$ ainsi de suite.

Pour la détermination des cycles, on va représenter k_i' ou k_i'' par k_i^i , i représentant le (') ou (") suivant que F_1 et F_2 ont même signe ou des signes opposés avec $|F_1| > |F_1 + F_2|$.

I - Détermination des cycles :

Equations des différents segments :

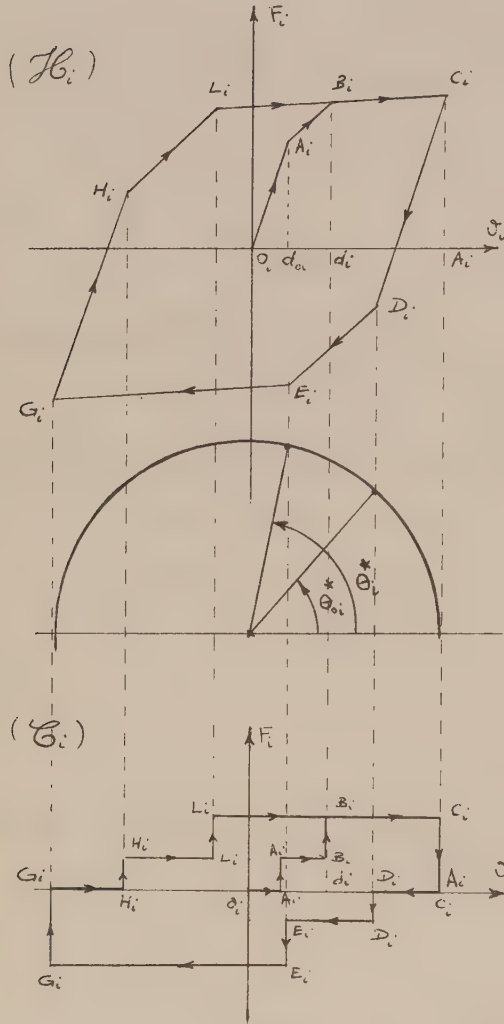


fig. 3.7

Equation de $L_i C_i$:

$$F_i = \frac{k_i}{4} v_i + \lambda_i$$

Equation de $E_i G_i$:

$$F_i = \frac{k_i}{4} v_i - \lambda_i$$

L'équation de $C_i D_i$ peut s'écrire :

$$F_i = k_i v_i + q_1$$

avec en C_i :

$$k_i A_i + q_1 = \frac{k_i}{4} A_i + \lambda_i$$

$$\text{d'où : } q_1 = \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i$$

L'équation de $D_i E_i$ s'écrit :

$$F_i = k_i^i v_i + q_2$$

avec en D_i

$$k_i^i (A_i - 2d_{oi}) + q_2 = k_i (A_i - 2d_{oi}) + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i$$

d'où :

$$q_2 = (A_i - 2d_{oi})(k_i - k_i^i) + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i$$

ce qui nous permet d'écrire en récapitulation :

$$\begin{aligned}
L_i C_i : F_i &= \frac{k_i}{4} v_i + \lambda_i \\
C_i D_i : F_i &= k_i v_i + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i \\
D_i E_i : F_i &= k_i^i v_i + (A_i - 2d_{oi})(k_i - k_i^i) + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i \quad (3.36) \\
E_i G_i : F_i &= \frac{k_i}{4} v_i - \lambda_i \\
G_i H_i : F_i &= k_i v_i - \lambda_i + \frac{3}{4} k_i A_i \\
H_i L_i : F_i &= k_i^i v_i - (A_i - 2d_{oi})(k_i - k_i^i) - \lambda_i + \frac{3}{4} k_i A_i
\end{aligned}$$

II - Mise en équation et méthode de résolution :

Désignons par $(\mathcal{H}_i)$ le cycle défini précédemment dans le plan (F_i, v_i) , par $\mathcal{C}_i$ le diagramme complémentaire dans ce même plan et excitions le système par des forces sinusoïdales.

$$F_1 \cos \omega t \text{ et } F_2 \cos \omega t$$

appliquées respectivement sur les masses concentrées à l'extrémité libre et au milieu des lames.

Dans ce cas les équations des mouvements des masses peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
m \ddot{y}_1 + \mathcal{H}_1(y_1, \dot{y}_1) + \mathcal{C}_1(y_1, \dot{y}_1) &= F_1 \cos \omega t \\
m \ddot{y}_2 + \mathcal{H}_2(y_2, \dot{y}_2) + \mathcal{C}_2(y_2, \dot{y}_2) &= F_2 \cos \omega t
\end{aligned} \quad (3.37)$$

Nous avons un système d'équations non linéaires indépendantes car notre intention était simplement de chercher les réponses équiphases. Ces équations peuvent être résolues par la méthode de l'équilibre harmonique (BOGOLIUBOV et KRYLOV).

Nous allons chercher des solutions de la forme :

$$y_i = A_i \cos \theta \quad \text{avec} \quad \theta = \omega t + \varphi \quad \text{et} \quad A_i = \frac{+}{-} |A_i| \quad (3.38)$$

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} = \dot{A}_i \cos \theta - A_i \dot{\varphi} \sin \theta - \omega A_i \sin \theta$$

Pour avoir des solutions périodiques, nous imposons la condition :

$$\dot{A}_i \cos \theta - A_i \dot{\varphi} \sin \theta = 0 \quad (3.39)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\omega \dot{A}_i \sin \theta - \omega^2 A_i \cos \theta - \omega A_i \dot{\varphi} \cos \theta$$

Substituons dans les équations (3.37) :

$$-m(\omega A_i \sin \theta + \omega^2 A_i \cos \theta + \omega A_i \varphi \cos \theta) + \mathcal{H}_i(A_i \cos \theta, \mu, t) + \mathcal{C}_i(A_i \cos \theta, \mu, t) = F_i \cos(\theta - \varphi) \quad (3.40)$$

Multiplions (3.39) par $\omega \cos \theta$, (3.40) par $\sin \theta$, soustrayons puis cherchons la valeur moyenne sur une période de θ ; étant donné que les variations de A_i et de φ sont lentes, nous arrivons à l'équation suivante :

$$-m \omega \dot{A}_i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_i(A_i, \theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{C}_i(A_i, \theta) \sin \theta d\theta = \frac{F_i}{2} \sin \varphi \quad (3.41)$$

Multiplions (3.39) par $\omega \sin \theta$, (3.40) par $\cos \theta$, additionnons et cherchons la valeur moyenne sur une période de θ :

$$-m \frac{\omega^2}{2} A_i - m \omega A_i \dot{\varphi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_i(A_i, \theta) \cos \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{C}_i(A_i, \theta) \cos \theta d\theta = \frac{F_i}{2} \cos \varphi \quad (3.42)$$

Posons :

$$\begin{aligned} C_i(A_i) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_i(A_i, \theta) \cos \theta d\theta \\ S_i(A_i) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_i(A_i, \theta) \sin \theta d\theta \\ c_i(A_i) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{C}_i(A_i, \theta) \cos \theta d\theta \\ s_i(A_i) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{C}_i(A_i, \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.43)$$

Les équations (3.41) et (3.42) s'écrivent :

$$\begin{aligned} -2m \omega \dot{A}_i + S_i(A_i) + s_i(A_i) &= F_i \sin \varphi \\ -m \omega^2 A_i - 2m \omega A_i \dot{\varphi} + C_i(A_i) + c_i(A_i) &= F_i \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ce sont en réalité quatre équations ($i = 1, 2$) à quatre inconnues :

$$F_1, F_2, A_1 \text{ et } \varphi \quad (A_2 = \alpha A_1 \text{ et } \alpha \geq 0)$$

Si $\alpha > 0$, nous avons des réponses en phase et si $\alpha < 0$, les réponses sont en opposition de phase.

III - Réponses équi-phases en régime stationnaire :

En régime stationnaire, nous avons : $\dot{A}_i = \dot{\varphi} = 0$

Nous allons remplacer A_i par A_{i0} et φ par φ_0

Les équations (3.44) deviennent :

$$\begin{aligned} S_1(A_{10}) + s_1(A_{10}) &= F_1 \sin \varphi_0 \\ -m \omega^2 A_{10} + C_1(A_{10}) + c_1(A_{10}) &= F_1 \cos \varphi_0 \\ S_2(A_{20}) + s_2(A_{20}) &= F_2 \sin \varphi_0 \\ -m \omega^2 A_{20} + C_2(A_{20}) + c_2(A_{20}) &= F_2 \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nous pouvons tirer :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_{10} + s_{10}}{S_{20} + s_{20}} = \frac{-m\omega^2 A_{10} + C_{10} + c_{10}}{-m\omega^2 A_{20} + C_{20} + c_{20}} \quad (3.46)$$

ou

$$\begin{aligned} F_1^2 &= (S_{10} + s_{10})^2 + (-m\omega^2 A_{10} + C_{10} + c_{10})^2 \\ F_2^2 &= (S_{20} + s_{20})^2 + (-m\omega^2 A_{20} + C_{20} + c_{20})^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

et

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{S_{10} + s_{10}}{m\omega^2 A_{10} - C_{10} - c_{10}} = \frac{S_{20} + s_{20}}{m\omega^2 A_{20} - C_{20} - c_{20}} \quad (3.48)$$

En écrivant l'égalité des expressions de $\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2$ données par (3.46) et (3.47) nous pouvons avoir l'expression de ω^2 :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{A_{20}(S_{10} + s_{10})^2 (C_{20} + c_{20}) - A_{10}(S_{20} + s_{20})^2 (C_{10} + c_{10})}{m A_{20}^2 (S_{10} + s_{10})^2 - m A_{10}^2 (S_{20} + s_{20})^2} \\ &\pm \frac{(S_{10} + s_{10})(S_{20} + s_{20}) [A_{20}(C_{10} + c_{10}) - A_{10}(C_{20} + c_{20})]}{m A_{20}^2 (S_{10} + s_{10})^2 - m A_{10}^2 (S_{20} + s_{20})^2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les résonances de phase ont lieu lorsque le deuxième terme de (3.49) est nul, c'est-à-dire pour :

$$A_{20}(C_{10} + c_{10}) = A_{10}(C_{20} + c_{20})$$

dans ce cas ; nous avons deux valeurs de ω (suivant le signe de α) :

$$\omega_{r1,2}^2 = \frac{C_{10} + c_{10}}{m A_{10}} = \frac{C_{20} + c_{20}}{m A_{20}} \quad \left(\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.50)$$

Ce sont les équations des courbes « squelettes ». Il y en a deux possibles : Pour $\alpha = \alpha_1 = 0,37$ (1^{er} mode) et pour $\alpha = \alpha_2 = -2,71$ (2^{ème} mode)

Calcul de C_i , S_i , c_i et s_i :

Remarquons tout d'abord que les points D_i et E_i (fig. 3.7) ont les abscisses suivantes :

$$\begin{aligned} v_{D_i} &= A_i - 2 d_{oi} \\ v_{E_i} &= \frac{(A_i - 2 d_{oi})(k_i - k_i^i) + 2 \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i}{\frac{k_i}{4} - k_i^i} \end{aligned}$$

(obtenue en écrivant que le point E_i est commun à $D_i E_i$ et à $E_i G_i$)

D'où :

$$\cos \theta_{oi}^* = \frac{A_i - 2 d_{oi}}{A_i} \quad (3.51)$$

$$\cos \theta_i^* = \frac{A_i - 2 d_{oi}}{A_i} \cdot \frac{k_i - k_i^i}{\frac{k_i}{4} - k_i^i} + \frac{2 \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i}{A_i \left(\frac{k_i}{4} - k_i^i \right)} \quad (3.52)$$

$$C_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_{oi}^*} (k_i A_i \cos \theta_i + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i) \cos \theta_i d\theta_i + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{oi}^*}^{\theta_i^*} \left[k_i^i A_i \cos \theta_i + (A_i - 2 d_{oi})(k_i - k_i^i) + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i \right] \cos \theta_i d\theta_i \\ + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_i^*}^{\pi} \left(\frac{k_i}{4} A_i \cos \theta_i - \lambda_i \right) \cos \theta_i d\theta_i$$

$$S_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_{oi}^*} (k_i A_i \cos \theta_i + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i) \sin \theta_i d\theta_i + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{oi}^*}^{\theta_i^*} \left[k_i^i A_i \cos \theta_i + (A_i - 2 d_{oi})(k_i - k_i^i) + \lambda_i - \frac{3}{4} k_i A_i \right] \sin \theta_i d\theta_i \\ + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_i^*}^{\pi} \left(\frac{k_i}{4} A_i \cos \theta_i - \lambda_i \right) \sin \theta_i d\theta_i$$

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{oi}^*}^{\theta_i^*} R_{oi} \cos \theta_i d\theta_i + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_i^*}^{\pi} R_i \cos \theta_i d\theta_i$$

$$s_i = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{oi}^*}^{\theta_i^*} R_{oi} \sin \theta_i d\theta_i + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_i^*}^{\pi} R_i \sin \theta_i d\theta_i$$

En effectuant les calculs, nous arrivons aux résultats suivants :

$$C_i = \frac{1}{\pi} (K_i - k_i^i) \left[A_i (\theta_{oi}^* + \frac{\sin 2 \theta_{oi}^*}{2}) + 2 (A_i - 2 d_{oi}) (\sin \theta_i^* - \sin \theta_{oi}^*) \right] \\ + \frac{K_i^i A_i}{\pi} \theta_i^* + \frac{K_i}{2\pi} A_i \left[\frac{\pi - \theta_i^*}{2} - \frac{\sin \theta_i^*}{4} \right] + \frac{2}{\pi} (\lambda_i - \frac{3}{4} K_i A_i) \sin \theta_i^* \quad (3.53)$$

$$S_i = \frac{1}{\pi} \left[K_i A_i \sin^2 \theta_{oi}^* + \frac{3}{2} K_i A_i (\cos \theta_{oi}^* - 1) \right] - \frac{1}{\pi} \left[4 \lambda_i \cos \theta_i^* + \frac{K_i}{4} A_i \sin^2 \theta_i^* \right] \\ + \frac{K_i^i A_i}{\pi} (\sin^2 \theta_i^* - \sin^2 \theta_{oi}^*) - \frac{2}{\pi} (A_i - 2 d_{oi}) (K_i - K_i^i) (\cos \theta_i^* - \cos \theta_{oi}^*) \quad (3.54)$$

$$c_i^i = \frac{2}{\pi} (R_{oi}^i - R_i^i) \sin \theta_i^* - \frac{2}{\pi} R_{oi}^i \sin \theta_{oi}^* \quad (3.55)$$

$$s_i^i = \frac{2}{\pi} R_{oi}^i \cos \theta_{oi}^* + \frac{2}{\pi} (R_i^i - R_{oi}^i) \cos \theta_i^* + \frac{2}{\pi} R_i^i \quad (3.56)$$

A remarquer que le calcul précédent concernant les courbes « squelettes » est valable seulement si le glissement total est atteint. Si l'amplitude est insuffisante pour obtenir ce cas, il faut calculer ω_r^2 en considérant seulement le glissement partiel, c'est-à-dire :

$$\mathcal{H}_i \begin{cases} F_i = K_i v_i \\ F_i = K_i^j v_i + \lambda_i \end{cases} \quad \mathcal{C}_i \begin{cases} F_i = 0 \\ F_i = -\lambda_i \end{cases}$$

Dans ce cas, nous avons :

$$C_i = (K_i - K_i^j) \frac{A_i}{\pi} \left[\theta_{oi}^* - \frac{\sin 2 \theta_{oi}^*}{2} \right] + K_i^j A_i$$

$$c_i = \frac{2}{\pi} \lambda_{oi} \sin \theta_{oi}^*$$

C - ETUDE EXPERIMENTALE

Pour l'étude expérimentale nous considérons les deux lames qui ont servi dans l'étude expérimentale du chapitre premier. Ce sont donc deux lames en duralumin encastrées à une extrémité et portant deux masses identiques en bronze; l'une de ces masses est fixée à l'extrémité libre et l'autre se trouve à une distance $l_1 = 425\text{mm}$ de l'encastrement.

$L = \text{longueur libre} = 825\text{mm}$

$b = 80\text{mm}$; $h = 10\text{mm}$ (section de chaque lame)

$m = 2,235\text{ kg} = \text{masse de chaque lame}$

$M = 5,285\text{ kg} = \text{masse concentrée}$

$I_z = 6,667\text{ mm}^4 = \frac{bh^3}{12} = \text{Inertie d'une lame}$

$E \simeq 8000\text{ kg/mm}^2 = \text{valeur approchée du module d'Young déterminé expérimentalement à } 5\% \text{ près}$

Le serrage des deux lames est assuré à l'aide de 64 ressorts identiques aux ressorts utilisés dans le chapitre premier, donc chacun a une raideur $K = 3,70\text{ kg/mm}$ et un tour de l'écrou de serrage est équivalent à une pression de $\frac{1}{bh}\text{ kg/mm}^2$ (b et h en mm). Ces ressorts sont répartis de chaque côté en double rangée de 16 ressorts chacune.

L'excitation est obtenue à l'aide de deux excitateurs PRODERA (20 Je 40) alimentés à travers un amplificateur de puissance Prodera, l'excitateur fixé sur la masse de l'extrémité développe une force égale à 183 g/100 mA et celui fixé sur la masse du milieu développe la force 168 g/100mA . Pour l'étude statique, on branche à l'entrée de l'amplificateur une pile $4,5\text{v}$ et pour l'étude dynamique un générateur CRC-TBF.

En face de chaque excitateur, nous avons fixé un capteur. Au cours des essais, trois types de capteurs ont été utilisés : capteur déplacement PHILIPS, capteur déplacement CIMATRAN ou capteur vitesse PRODERA.

I - Essais statiques :

1° - Vérification de la forme du cycle :

Nous avons tracé des cycles $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ et 10 tours et pour des excitations $F_1 = F_2$ (excitateurs en série et en phase) et nous avons constaté que la forme obtenue est toujours analogue au cycle théorique avec un rapport de pentes avant et après glissement total toujours voisin de 4 (graphiques III.1 - III.2 et III.3). Nous avons, de plus, noté un décrochement au début du glissement qui caractérise la discontinuité signalée au cours de l'étude théorique; ce phénomène est net, surtout dans le cas de fortes pressions de serrage.

2° - Energie dissipée :

En calculant l'expression de l'énergie dissipée, comme au chapitre premier, nous

trouvons :

Energie dissipée pendant le glissement partiel (pour F_1 et F_2 dans le même sens) :

$$D_1 = 4 \mu p b E^{-1} \int_0^{L/2} \left[\int_0^x \Delta \sigma_x(\xi) d\xi \right] dx = 4 \mu p b E^{-1} \left[\frac{F_1 + F_2}{4bh^2} - \frac{\mu p}{3h} \right] L^3$$

lorsque $F_1 = F_2$, D_1 est valable pour $\frac{2}{3} \mu p b h \leq F_1 = F_2 \leq \frac{4}{3} \mu p b h$

Au début du glissement total, nous avons :

$$D_1 = 4 \mu p b E^{-1} \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{\mu p b h}{4bh^2} - \frac{\mu p}{3h} \right] L^3 = \frac{4}{3} \mu^2 p^2 \frac{b}{h} E^{-1} L^3$$

Energie dissipée pendant le glissement total :

$$D_2 = 4 \mu p b E^{-1} \left[-\frac{8 \mu p L^3}{3h} + \frac{2 F_{1m} L^3}{bh^2} \right]$$

Energie totale :

$$D = D_1 + D_2 = \frac{4 \mu p b L^3}{E h} \left[\frac{2 F_{1m}}{bh} - \frac{7 \mu p}{3} \right]$$

$$F_{1m} = 800 \text{ mA} \rightarrow 8 \times 185 \text{ g}$$

$$d'où \quad D = 1,14 \mu \text{N} [370 - 130 \mu \text{N}]$$

N = nombre de tours de l'écrou de serrage

En remplaçant μ par sa valeur $\mu = 0,320$ trouvée lors de l'étude du système à deux lames en chapitre premier, nous pouvons tracer la courbe théorique $D(N)$ et la comparer à la courbe expérimentale tracée en considérant la surface des cycles tracés à l'extrémité libre (graphique III.4).

II - Etude dynamique :

1°) Conservation des modes propres à la résonance de phase :

Le tracé des courbes de résonance données par les deux capteurs C_1 (à l'extrémité) et C_2 (au milieu) en excitant seulement à l'extrémité libre, en même temps que la courbe de déphasage des signaux (capteur -excitateur) nous montre que pour le premier mode, par exemple, la courbe ($C_2 \times 2,7$) coupe C_1 à la résonance de phase (graphique III.5).

2°) Forme des courbes « squelettes »

Nous avons tracé les courbes « squelettes » théoriques pour le premier mode et avec F_1 et F_2 dans le même sens et nous avons constaté, en considérant des coordonnées réduites avec :

$$m=1 \quad K_1=1 \quad d_{01}=1$$

que le glissement total commence pour $A_1 > 9$.

Dans le cas du glissement partiel ω_1^2 varie entre 1 et 0,78 , donc le glissement total commence à $\omega_1^2 = 0,78$.

Nous avons essayé de tracer les mêmes courbes pour le second mode et pour F_1 et F_2 et toujours dans le même sens et nous avons constaté qu'il est presque impossible d'avoir le glissement total. En effet, pour que ce glissement soit atteint, il faut que $A_1 > 1400$ ($d_{01} = 1$). Dans le plan (A_2, ω^2) nous avons trouvé que le glissement total est atteint pour $A_2 > 2000$ ($d_{02} = 1$ et $K_2 = 1$) (voir graphique III. 6). De toute façon, pour le second mode, nous avons fait des essais avec F_1 et F_2 en opposition de phase et, dans ce cas, le glissement total s'obtient plus facilement. Nous avons remarqué, en outre, aussi bien pour le premier mode que pour le second (en prenant successivement $K_1 = 1$ et $K_2 = 1$) que les valeurs de K_1^I et K_2^I sont très voisines comme si le système tendait à devenir linéaire à la résonance de phase, comme le montre le tableau suivant :

	$\alpha = 0,37$	$\alpha = -2,71$	
	$K_1 = 1 \quad d_{01} = 1$	$K_1 = 1 \quad d_{01} = 1$	$K_2 = 1 \quad d_{02} = 1$
K_1	1	1	0,871
K_2	16,576	1,148	1
K_1^I	0,758	0,181	0,157
K_2^I	0,709	0,223	0,157
$^{4/3} \mu_{pbh}$	7,133	-2,110	0,679
λ_{oi}	$i=1$ 0,242	$i=1$ 0,819	$i=2$ 0,843
λ_i	$i=1$ 4,861	$i=1$ 1,945	$i=2$ 0,951

3°) Courbes de résonance

Les courbes de résonance tracées pour différentes pressions de serrage peuvent nous indiquer la flèche dynamique à la fin (ou au début) du glissement par la présence d'un point anguleux (graphiques III-8 - 13).

Nous pouvons dresser le tableau suivant qui nous permet de comparer les valeurs statiques et dynamiques de d_{01} et d_1 pour différentes pression de serrage :

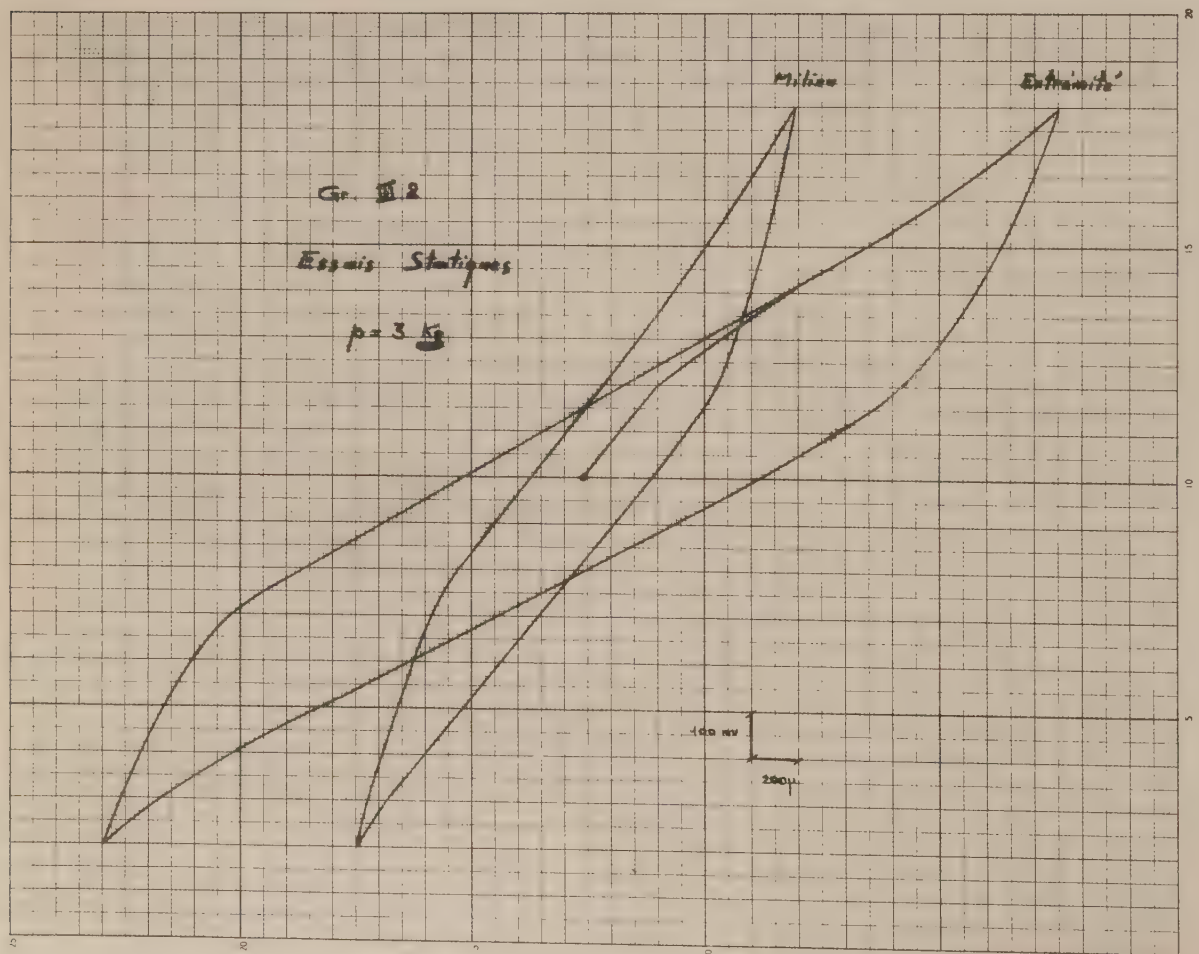
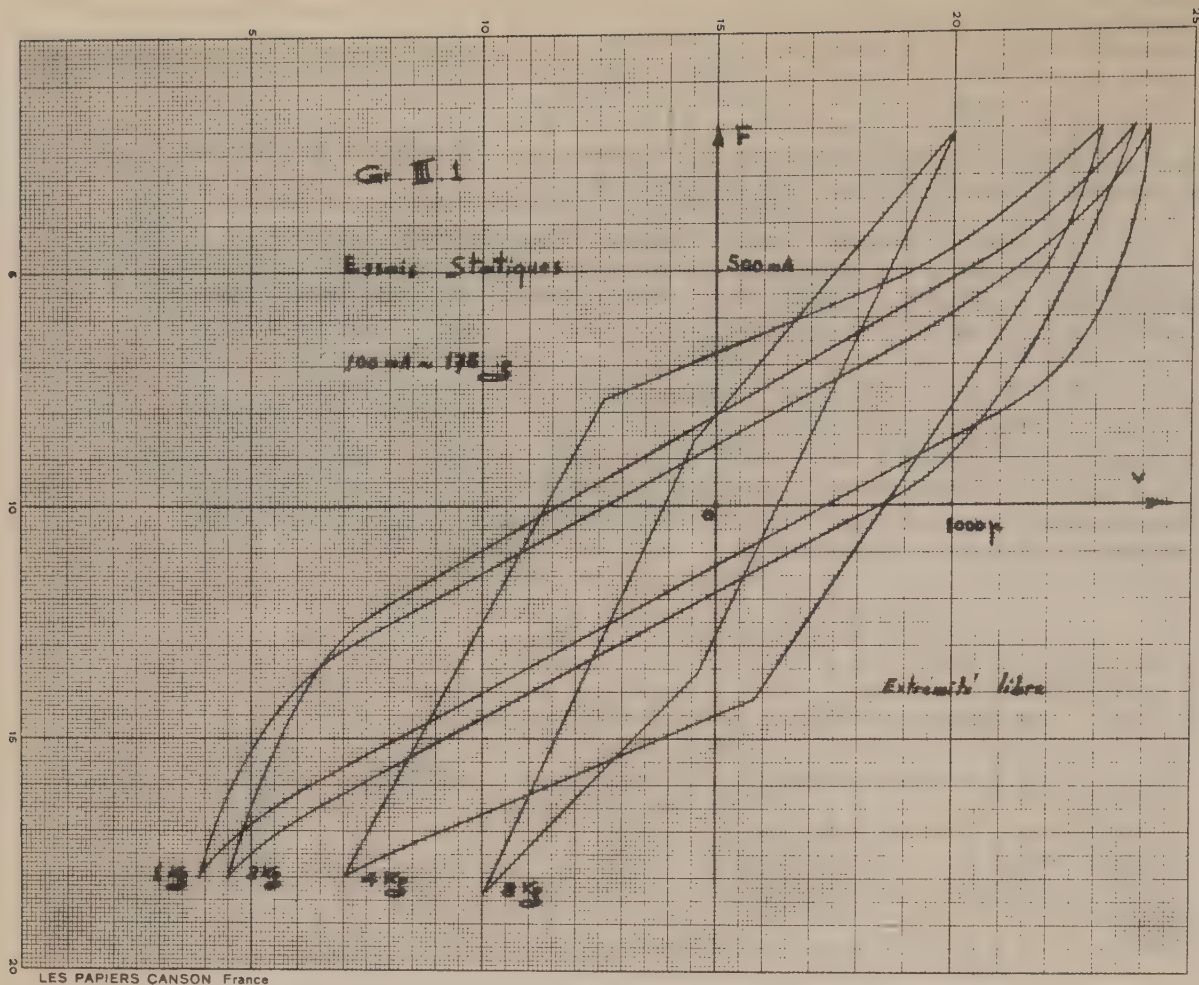
N	d_{01} statique mm	d_{01} dynamique mm	d_1 statique mm	d_1 dynamique mm
2	0,16	0,18	0,36	0,38
3	0,26	0,28	0,54	0,54
5	0,38	0,36	0,70	0,64

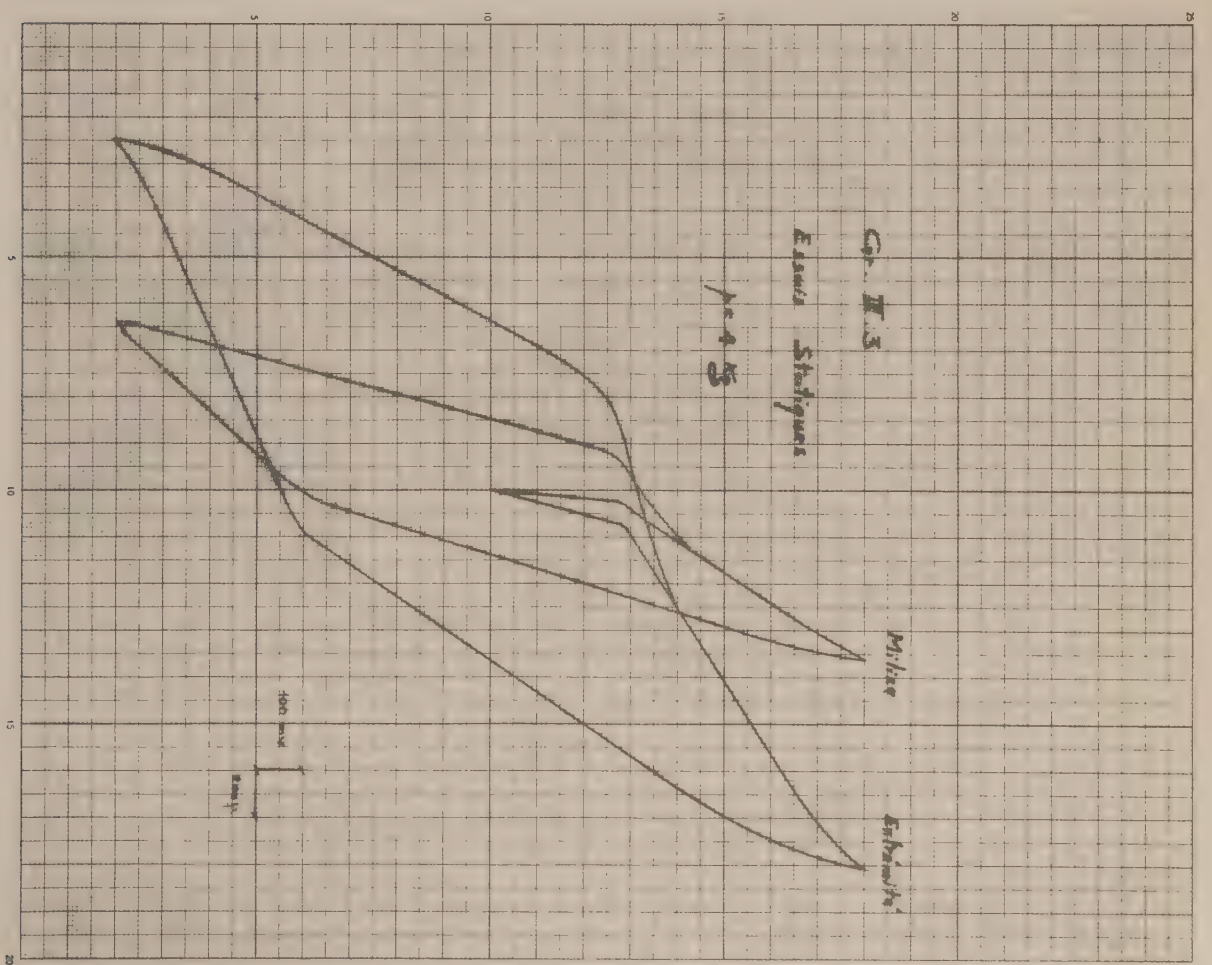
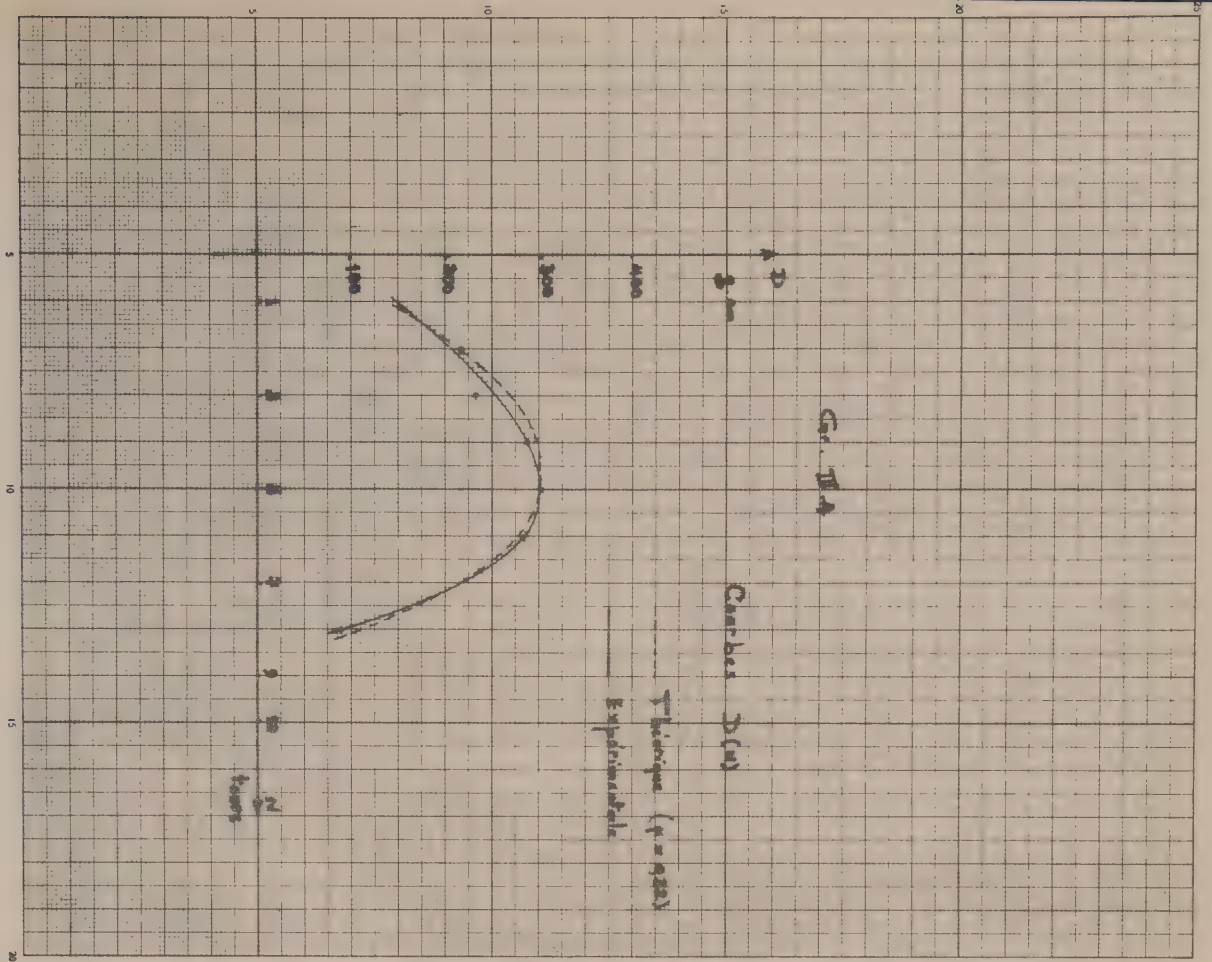
d_{01} et d_1 sont les flèches à l'extrémité libre mais, pour les calculer, nous avons cherché les points anguleux sur les courbes de résonance de l'extrémité libre et du milieu.

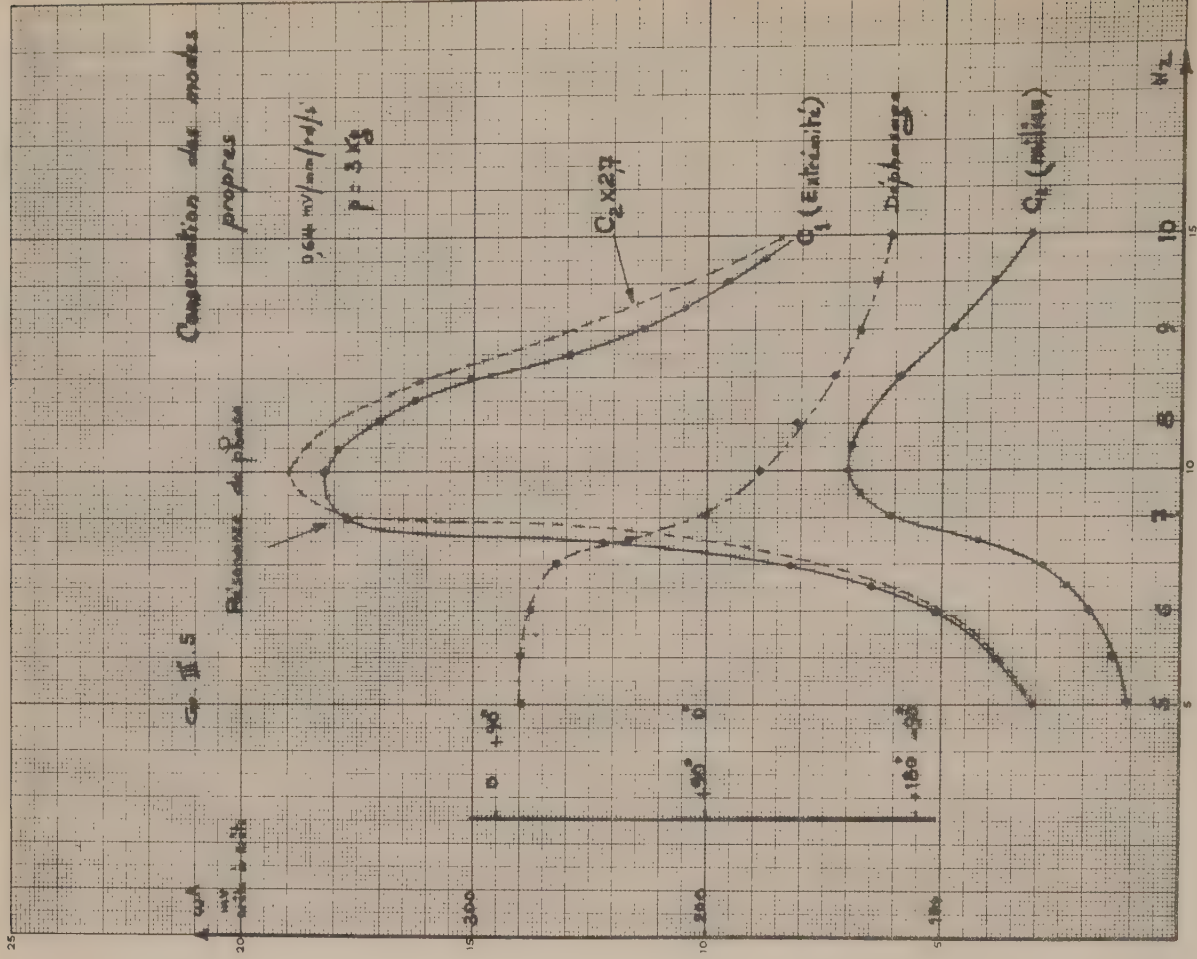
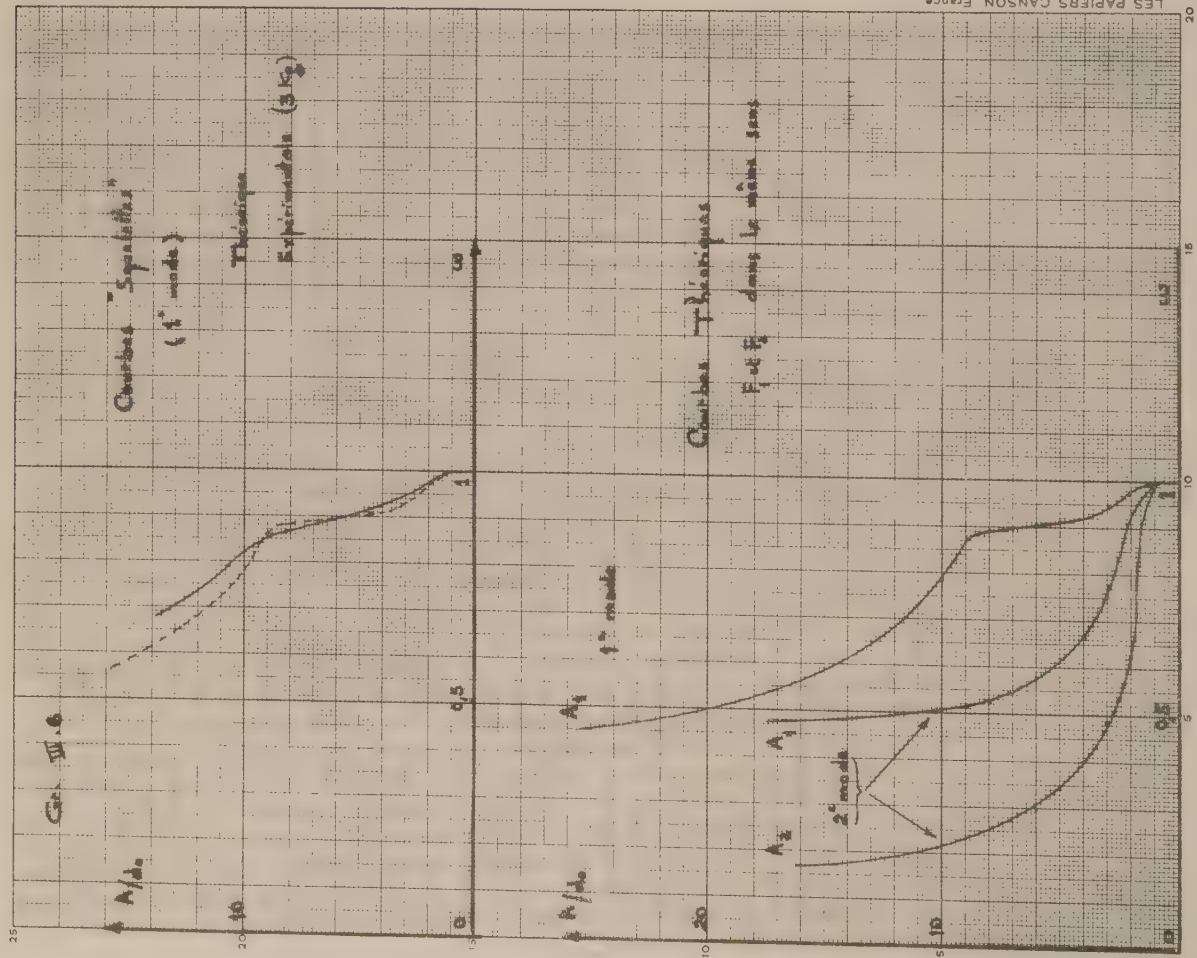
Les courbes « squelettes » ne sont pas aussi régulières que les courbes théoriques, ce qui peut se justifier étant donné que la pression de serrage ne peut pas être tout à fait uniforme. La présence assez nette des points anguleux sur les courbes tracées pour $N = 3$ tours, nous permet de tracer la courbe « squelette » en coordonnées réduites; la courbe obtenue est assez voisine de la courbe théorique (graphique III . 6)

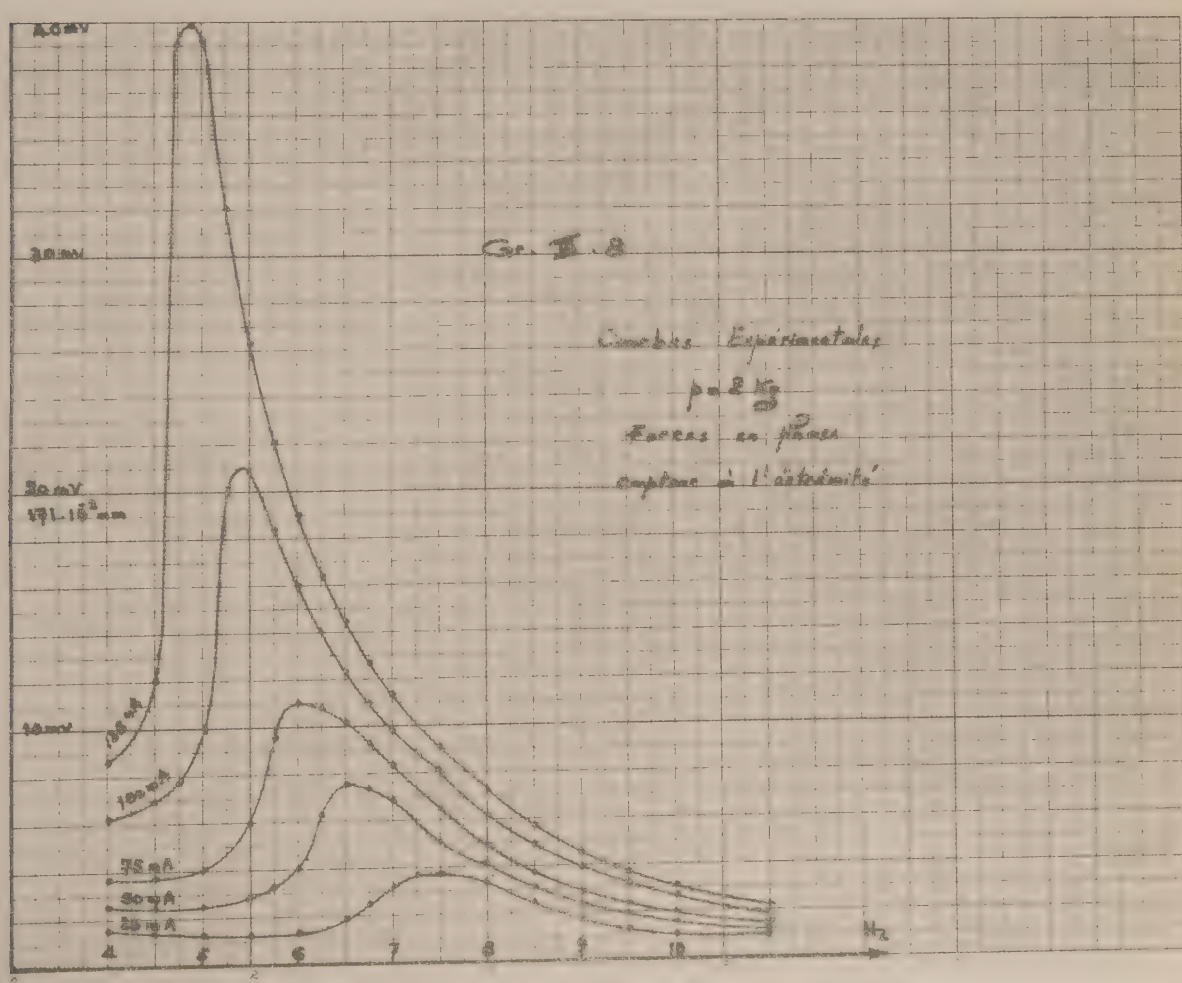
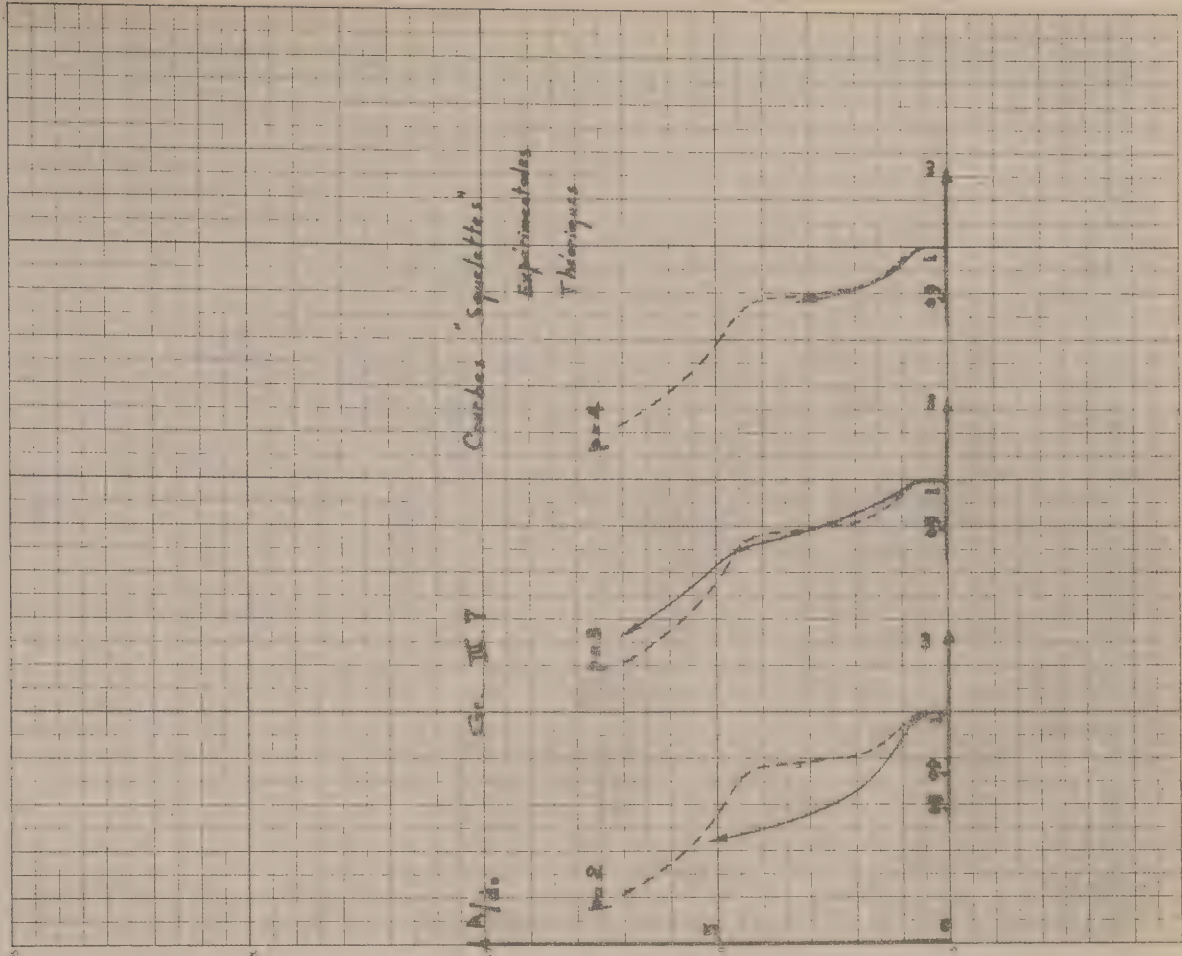
La pression $p \sim 3 \text{ kg}$ ($N=3$) nous paraît ici comme une pression optimum en pratique, qui nous permet de vérifier la théorie. Nous constatons, en outre, que pour $p \sim 2 \text{ kg}$ ($N=2$ tours), tout se passe sur la courbe « squelette » comme si le glissement se faisait totalement pour d_{01} . Par contre, pour $N = 4$ tours, les courbes expérimentale et théorique sont confondues au début, mais l'excitation adoptée est insuffisante pour atteindre le glissement total.

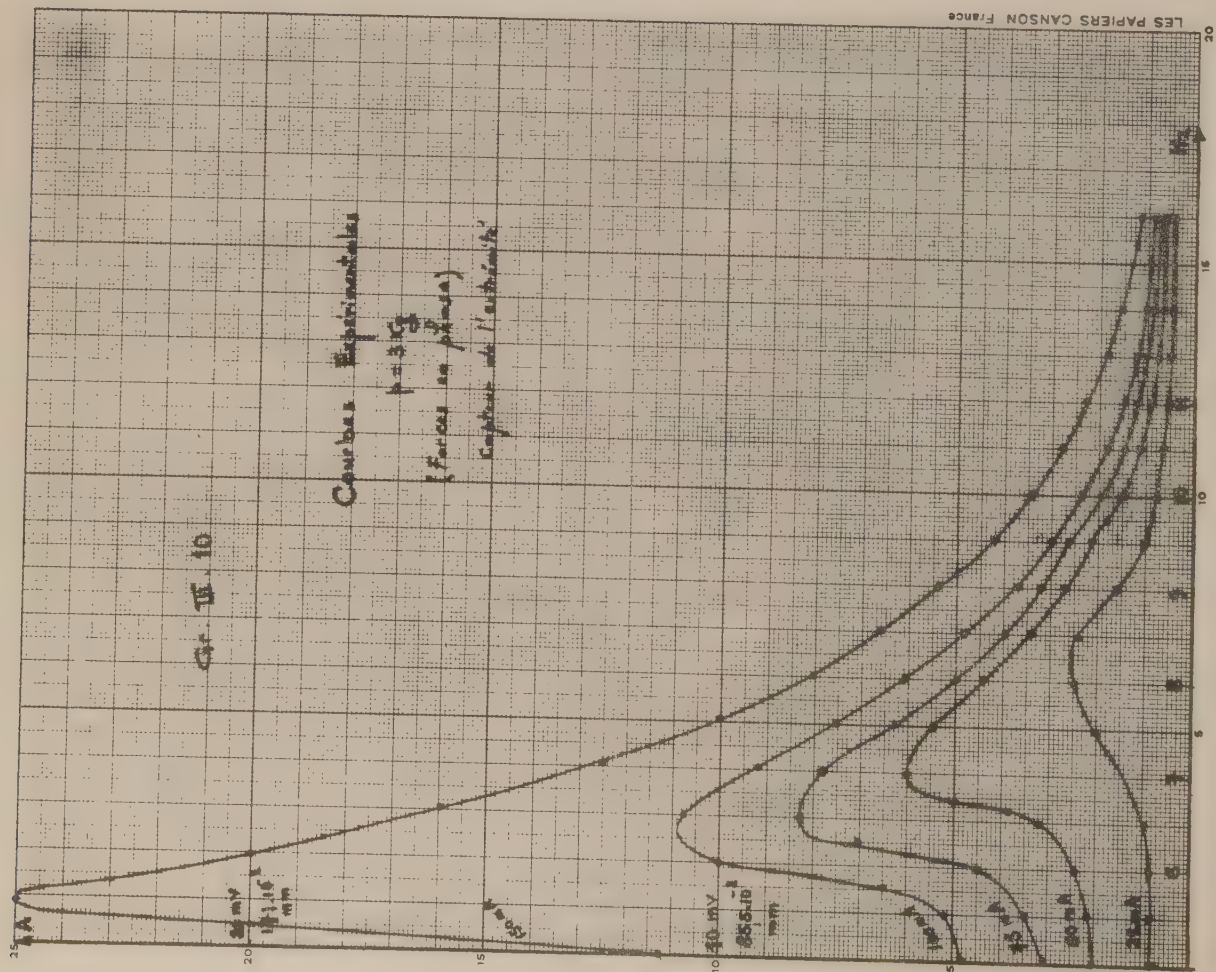
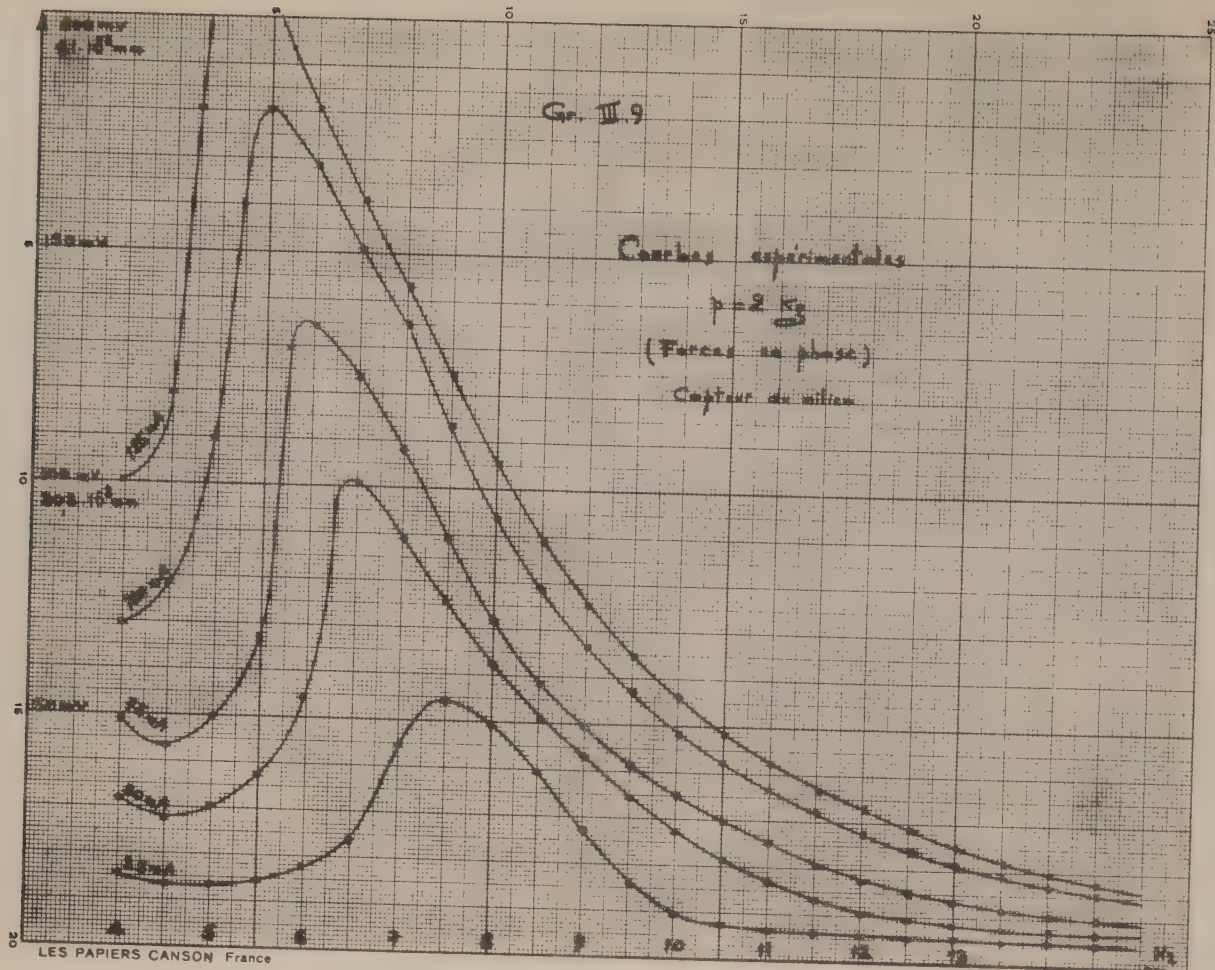
÷
÷ ÷
÷

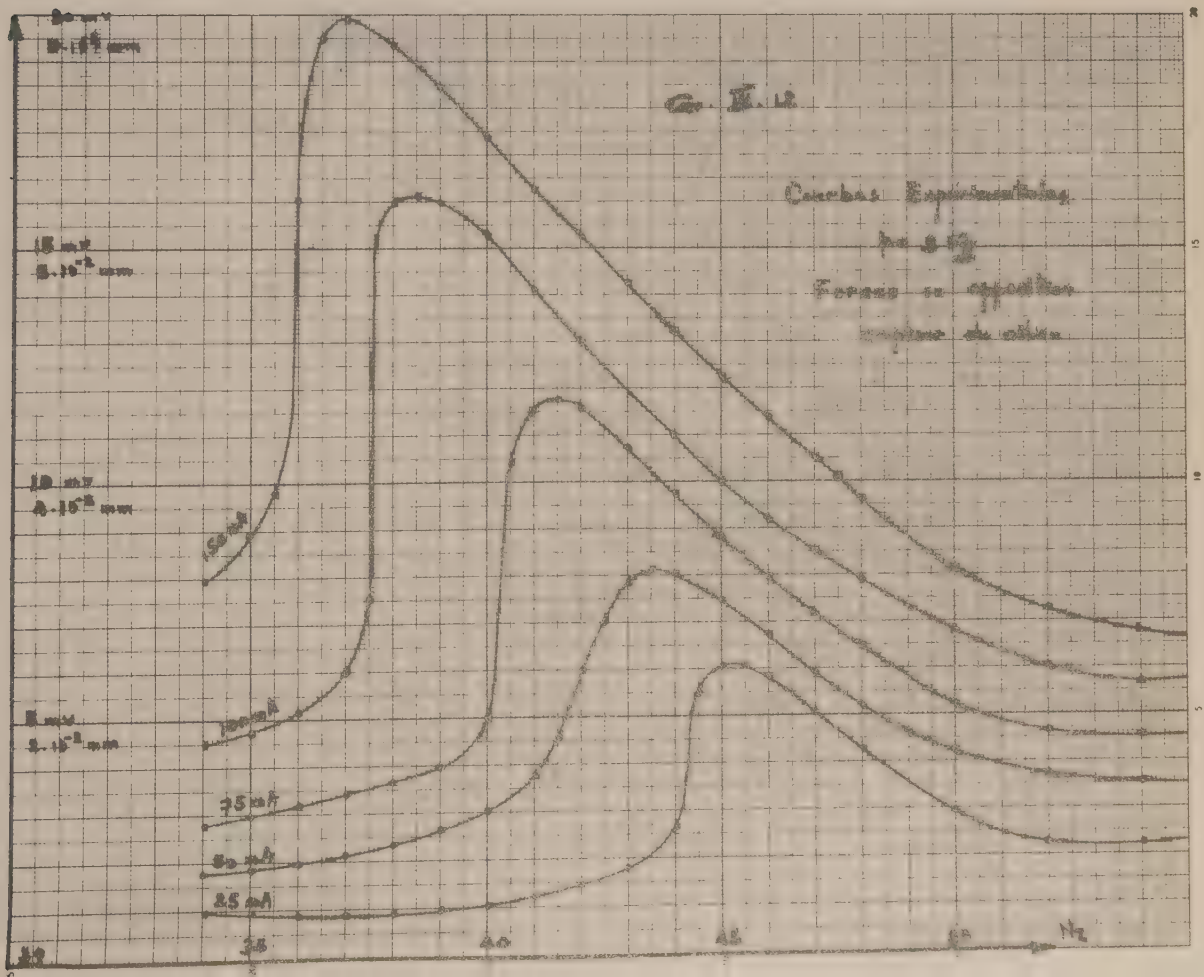
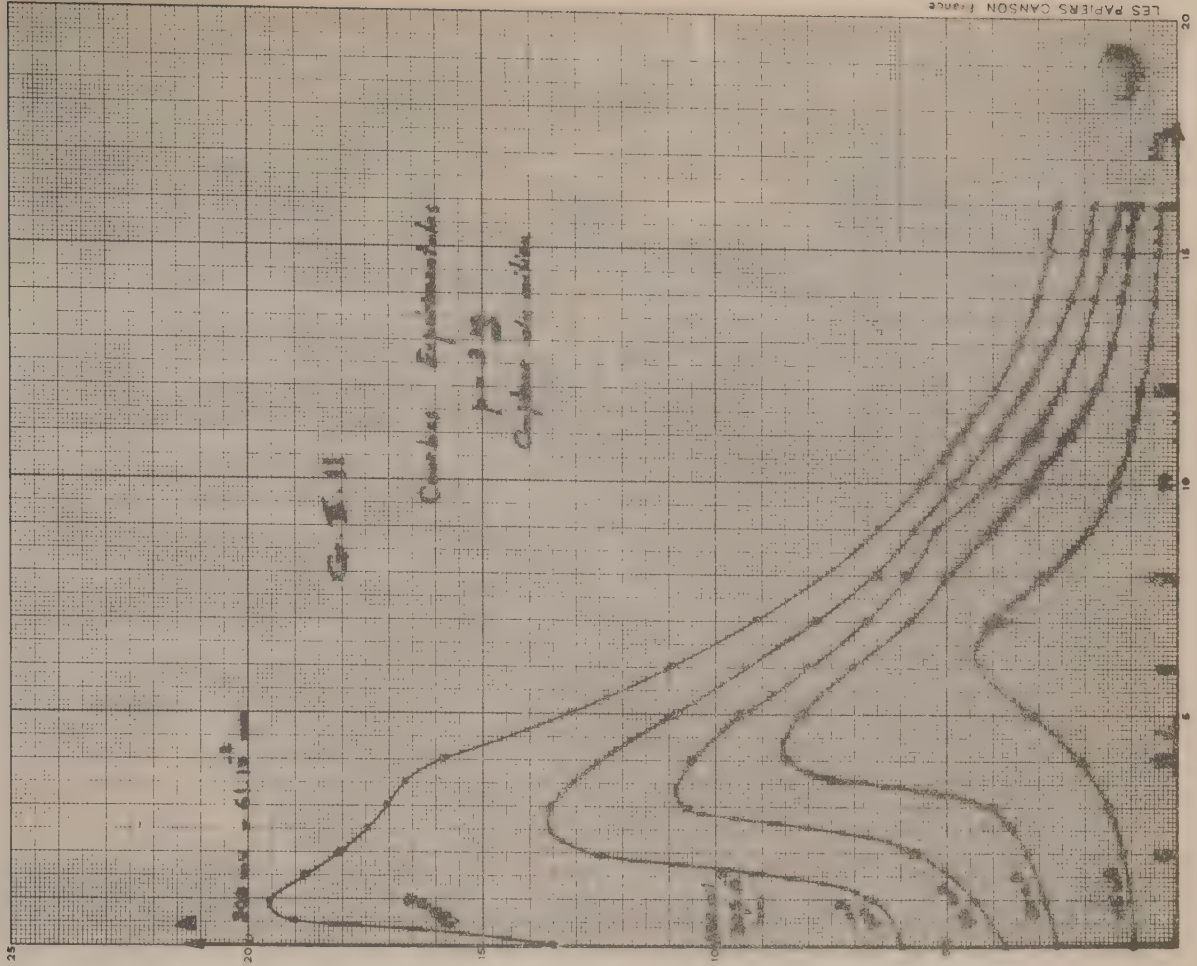


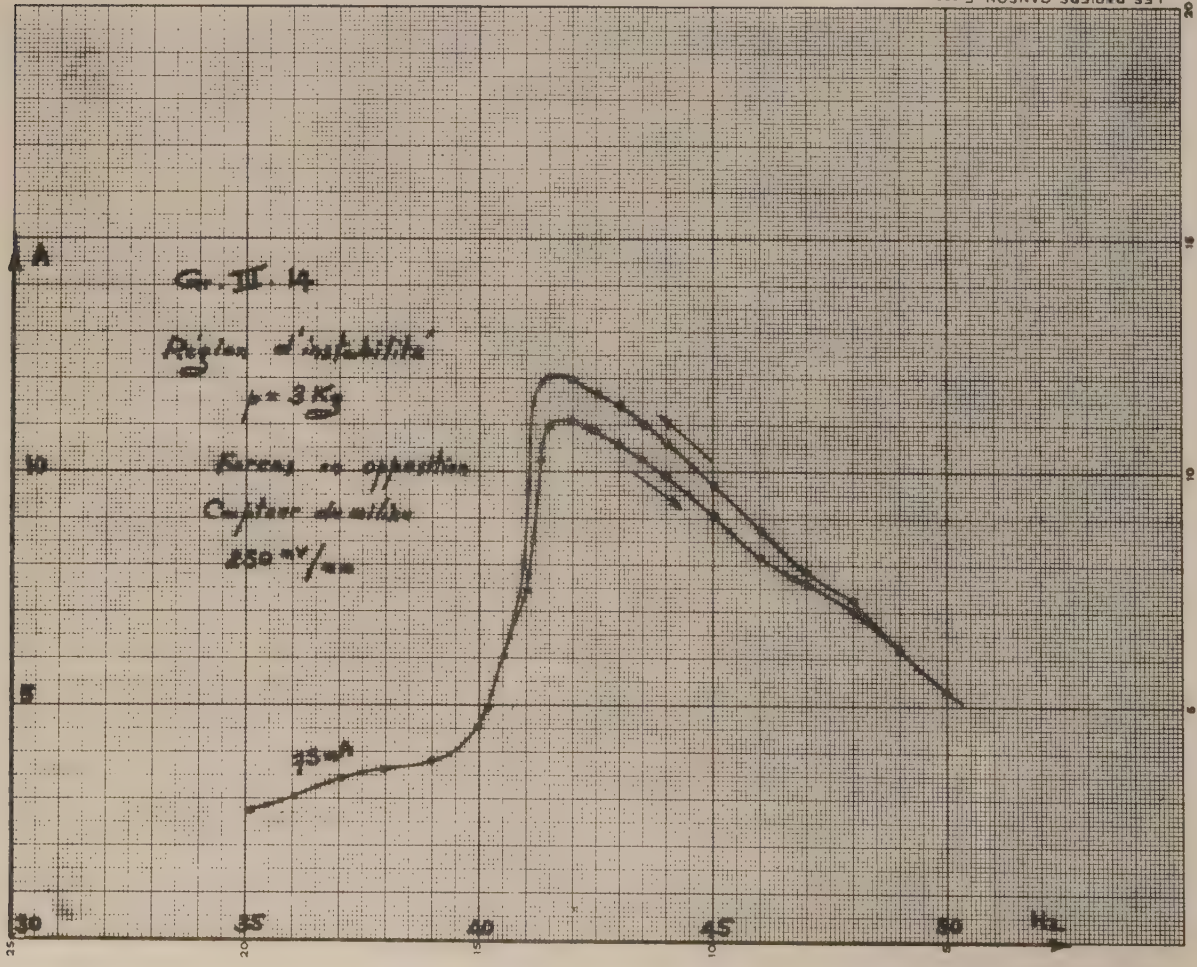
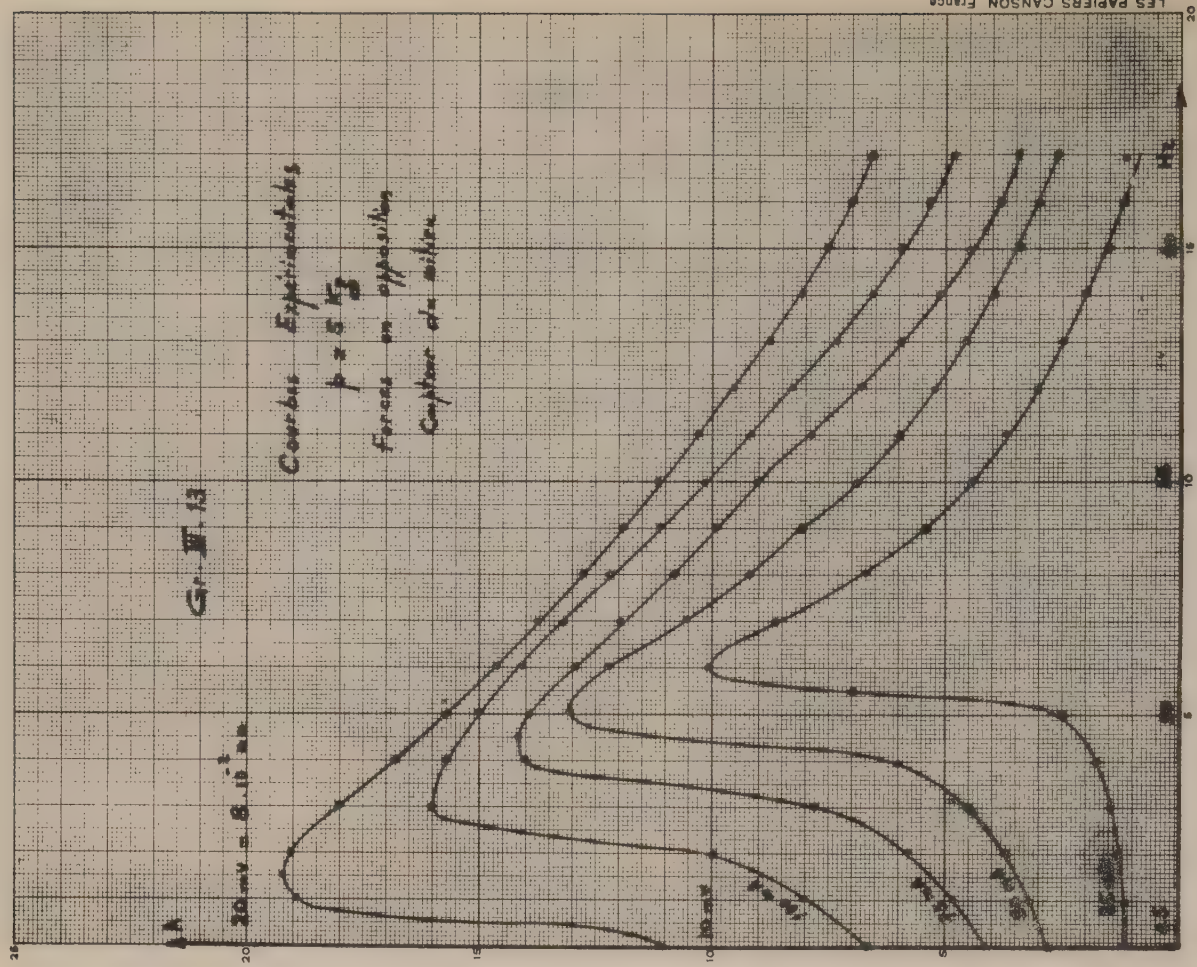










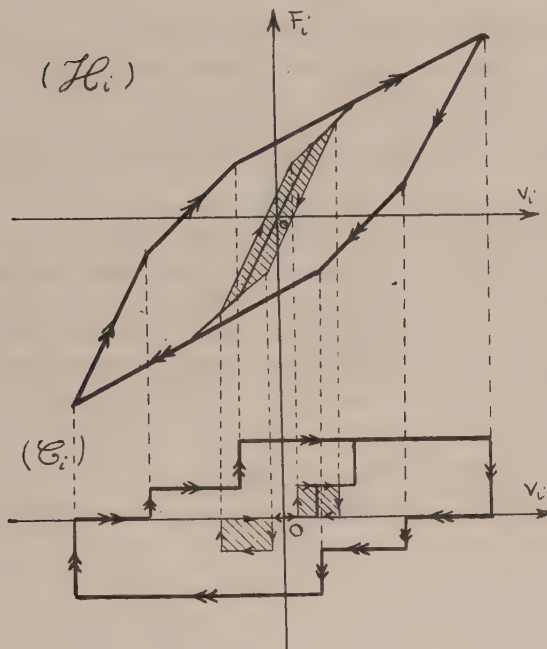


Conclusions du troisième chapitre -

L'étude statique nous a permis d'écrire les équations aux réponses équiphases et nous avons tracé la courbe « squelette » en utilisant la propriété de la conservation des modes propres à la résonance de phase .

La vérification expérimentale de l'étude dynamique est très difficile à obtenir car la pression de serrage ne peut pas être uniforme et régulière, ce qui a une grande influence ici . Pour une faible pression de serrage, nous pouvons avoir directement le glissement total sans passer par le glissement partiel . Mais nous avons obtenu quand même des résultats assez approchés surtout pour $p \sim 3$ kg ($N = 3$ tours) .

L'intérêt de ce chapitre réside surtout dans l'étude théorique qui nous a permis de tracer



la courbe « squelette » sans passer par les équations du mouvement dans le cas général et cette courbe « squelette » nous donne les informations les plus intéressantes sur le comportement des courbes de résonance.

Le calcul statique de $S(A_i)$ et de $C(A_i)$ peut se faire facilement. Ainsi, pour le glissement partiel, nous pouvons prendre le cycle hachuré et pour le glissement total, nous considérons le grand cycle (fig. 3.8) ; nous calculons l'aire et l'inclinaison de la grande diagonale .

÷
÷ ÷
÷

CONCLUSION GENERALE

Le principe de l'étude du système à un seul degré de liberté peut être étendu à d'autres systèmes plus compliqués (lames non identiques, frottement variable suivant une loi donnée, pression de serrage uniforme par régions ...) aussi bien du point de vue statique que du point de vue dynamique . Le problème se ramène essentiellement à la recherche du cycle d'hystérésis qui peut nous donner par sa surface et son inclinaison, respectivement $S(A)$ et $C(A)$.

Dans tous les cas, l'équation de la courbe « squelette » s'écrit $\omega_r^2 = \frac{C(A)}{A}$; elle est donc liée à la raideur équivalente, donc à l'inclinaison de la grande diagonale du cycle multilinéaire.

Le calcul statique de $S(A)$ et $C(A)$ à partir du cycle d'hystérésis peut se faire dans tous les cas et quel que soit le nombre de degrés de liberté .

Dans le cas du système à deux degrés de liberté découplés, l'étude complète est possible en mécanique non linéaire et nous pouvons constater qu'un système non linéaire peut, en général, être considéré comme linéaire au voisinage de la résonance et, dans ce cas, les formes propres sont conservées, ce qui nous conduit à définir une méthode de portée générale qui permet de tracer les courbes « squelettes » : lieu des points à la résonance de phase dans le plan (amplitude - fréquence) . Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté non découplables, cette méthode consiste à commencer par chercher des réponses équiphases, puis à prendre comme modes propres à la résonance de phase, les modes du système linéaire associé.

C'est surtout une méthode de calcul théorique qui nous donne à partir des courbes « squelettes » les renseignements nécessaires à l'étude d'une construction.

÷

÷ ÷

÷

BIBLIOGRAPHIE

- 1 . Y. PIRONNEAU : Les cours de Mécanique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de NANTES
- 2 . Y. PIRONNEAU et S. DUBIGEON : « Détermination des matrices $M \cdot B \cdot K$ des systèmes quasi-linéaires par excitation harmonique équiphasé : Méthode de la réponse équiphasé » Annales de l'ENSM 1964 - pp. 1 - 36
- 3 . S. TIMOSHENKO : « Théorie des vibrations à l'usage des ingénieurs » Traduction française . Béranger 1954 . pp . 31 - 64 .
- 4 . J.P. DEN HARTOG : « Vibrations mécaniques » Traduction française - Dunod 1960 - pp. 336 - 440
- 5 . N. KRYLOV et N. BOGOLIUBOV : « Introduction to Nonlinear mechanics » Traduction anglaise 1949
- 6 . W.J. CUNNINGHAM : « Analyse non linéaire » Traduction française . Dunod 1963
- 7 . G.S. PISARENKO : « Oscillations of Elastic systems with consideration of Energy Scattering in the material » . Traduction américaine . OTS-US Dept of Commerce 1960
- 8 . L.E. GOODMAN and J.H. KLUMPP « Analysis of slip damping with reference to turbine-blade vibration » Journal of Applied Mechanics . 1956 pp. 421 - 429
- 9 . B.J. LAZAN and L.E. GOODMAN : Effect of material and slip damping on resonance behavior SHOCK and VIBRATION Instrumentation , ASME , Publication pp. 55 - 74 .
- 10 . T.K. CAUGHEY : « Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis » Journal of Applied Mechanics . 1960 . pp. 640 - 643
- 11 . W.D. IWAN : « The steady - state response of a two - degree - of - freedom bilinear hysteresis system » Journal of Applied Mechanics . 1965 . pp. 151 - 156
- 12 . K. KLOTTER and E. PINNEY : « A comprehensive stability criterion for forced vibrations in nonlinear vibrations » Journal of Applied Mechanics. 1953 pp. 9-12
- 13 . W.S. STUPNICKA : « Normal modes of a nonlinear two-degree-of- freedom system and their properties » Archiwum budowy Maszyn . vol. 10 n° 1 , 1963 pp. 35-56
- 14 . R.M. ROSENBERG : « Normal modes of Nonlinear dual-mode systems » Journal of Applied Mechanics 1960 . pp. 263 -268
- 15 . R.M. ROSENBERG : « An normal vibrations of a general class of nonlinear dual -mode systems » Journal of applied Mechanics 1961 . pp. 275 - 283
- 16 . R.M. ROSENBERG : « The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems » Journal of applied Mechanics . 1963 . pp. 7 -14 .
- 17 . R.E.D. BISHOP and J.C. JOHNSON : « The Mechanics of Vibration » Cambridge - University Press

÷

÷ ÷

÷

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté

**EQUILIBRE DES SYSTEMES ELASTIQUES
SOUS L'ACTION DES FORCES NON CONSERVATIVES**

VU

Le Directeur de Thèse

Y. PIRONNEAU

VU et APPROUVE

NANTES, le 11 AVR. 1967

VU

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Le Président du Jury :

Y. PIRONNEAU

G. BRILLOUET

VU et PERMIS d'IMPRIMER

NANTES, le 11 Avril 1967

*Le Recteur de l'Académie de Nantes
Président du Conseil de l'Université*

M. SCHMITT

